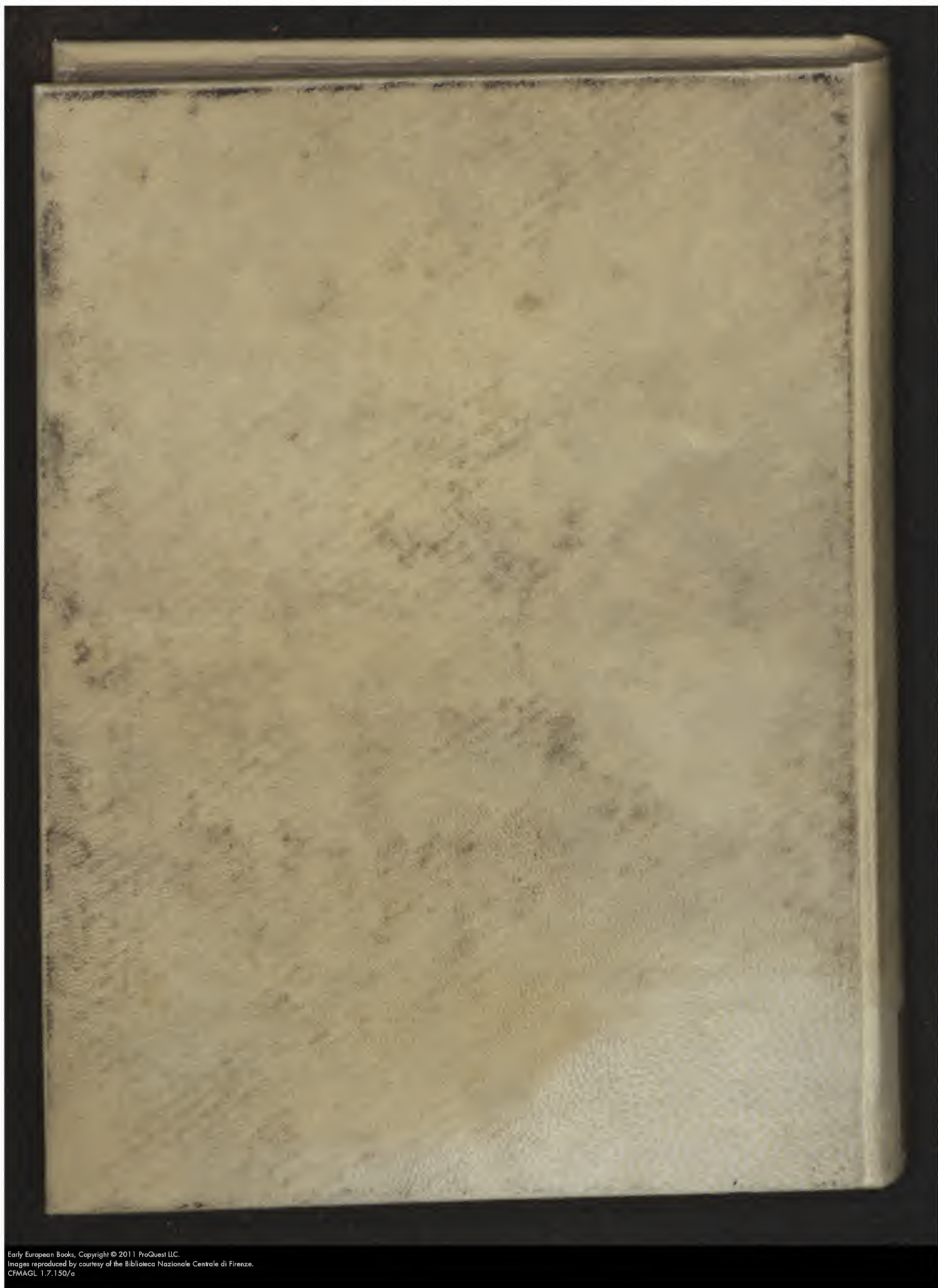




Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a





Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a



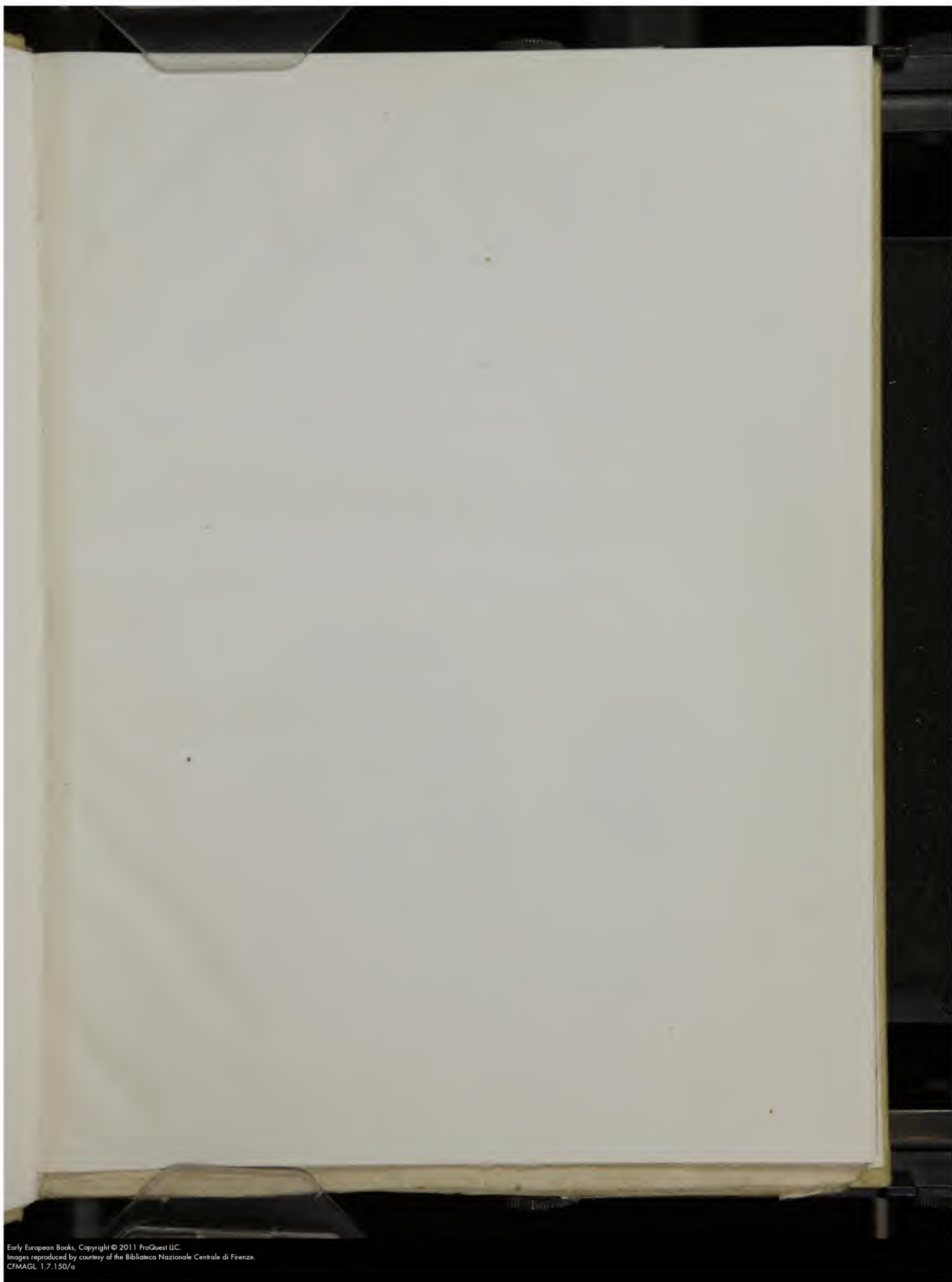
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a

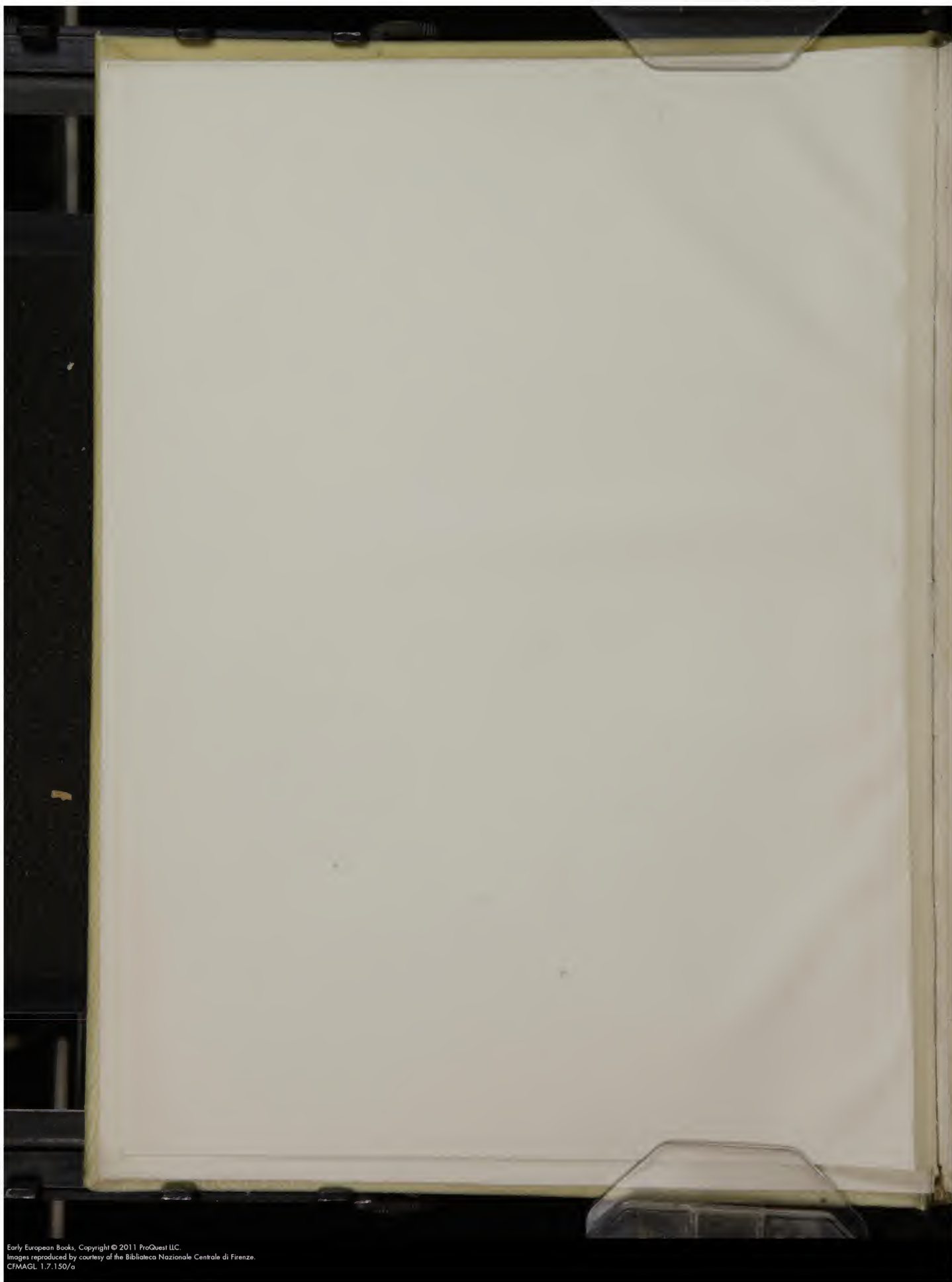


Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a

1. 7. 150







1-7150
V E R A
C I R C V L I

Et Hyperbolæ Quadratura

C V I A C C E D I T

G E O M E T R I A

P A R S V N I V E R S A L I S

Inseruiens quantitatum Curvarum transmutationi
& mensuræ.

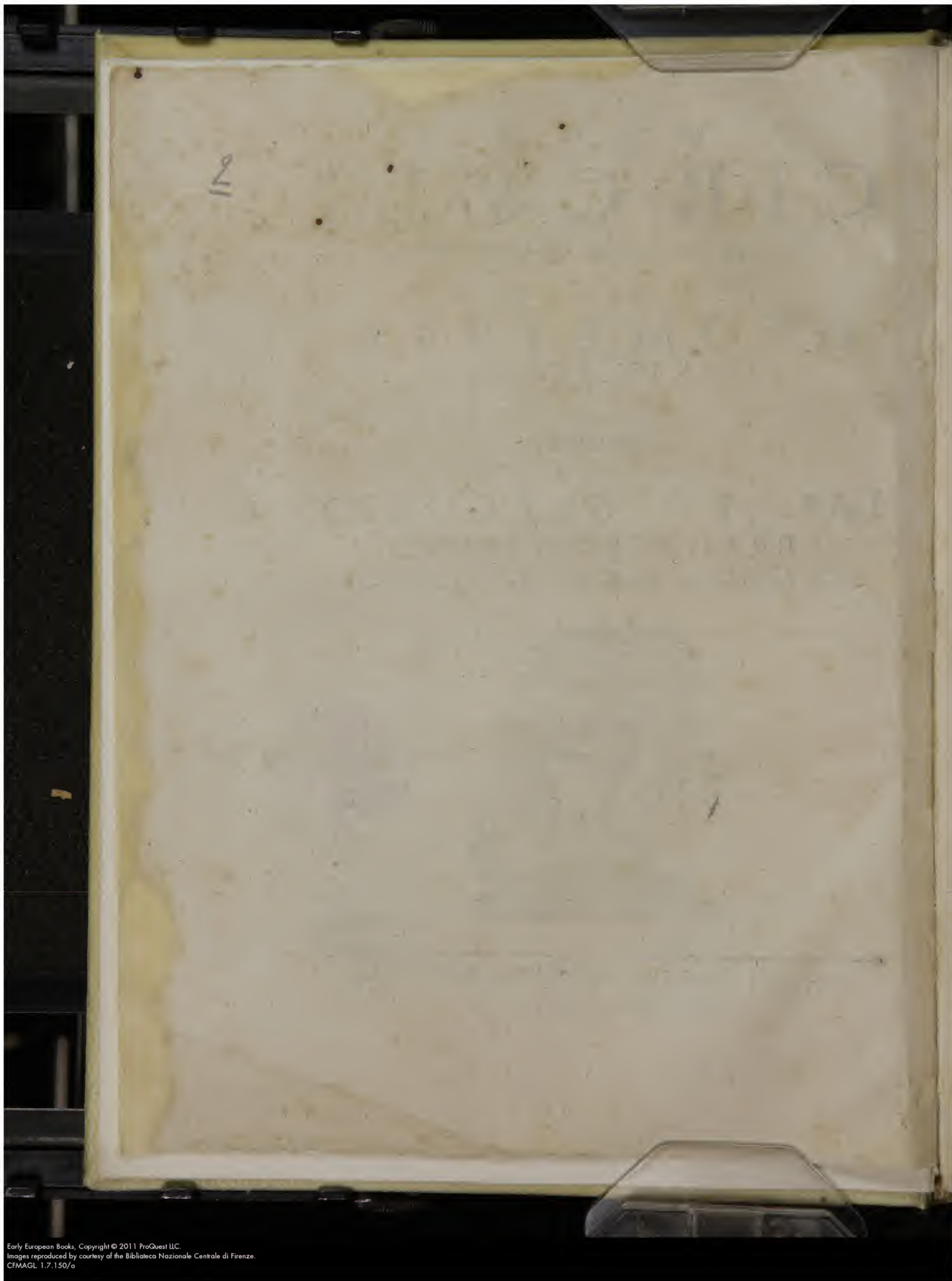
A V T H O R E

I A C O B O G R E G O R I O
A B R E D O N E N S I S C O T O .

C V M P R I V I L E G I O S E R E N I S S . S E N A T V S V E N E T I .



PATAVII, Typis Heredum Pauli Frambotti Bibliop.
Superiorum Permissu, 1668.



ILLVSTRISS. ATQ; PRÆSTANTISS. VIRO

IOANNI MICHAELI PIERVCCIO

In Academia Patauina Iuris Prudentiam è Prima
Sede Profitenti.

Petrus Maria Frambottus felicitatem precatur.



Inter præclaras animi dotes, eximiasque
virtutes, quibus affluere cuicumque videris
Illustrissime Vir, ea profecto spectabilis, ac
summopere commendabilis est, qua studijs
bonarum artium, atque disciplinarum ad-
dictos amore prosequeris, totisque viribus
patrocinio foues, atque tueris. Quamobrè
cùm primùm singularem, ac multiplici doctrinæ genere præ-
stantem Iacobum Gregorium huius Tractationis Auctorem per
spectum habuisti; ad necessitudinem tibi statim adiungens, con-
suetudine, familiaritateque coniunxisti. Hic porro cuiusmodi
te effinxerit natura cognoscens, nimirum indole præstanti, mo-
ribus suauissimis, pietate summa, ingenii alacritate, eruditione
uberrima, & vt paucis perstringam, Virum vnde quaque specta-
bilem, præclarissimis, amplissimisque te laudibus, ut par erat
extollens, commendabat in primis eam, qua polles beneuolen-
tiam, præcipuamque clementiam, ac lenitatem, & velut officij ple-
num te semper admirabatur. Quo non semel id vsurpabat
in te videlicet elucere nobile, præstantissimumque decus om-
nigenæ disciplinæ, præsertim Iuris Prudentiæ, quam è Prima
Sede Profitentem, hæc te veneratur celebris Academia, non ma-
gis, quàm excelsæ virtutis mores conformantis, ornamentum,
laudenter aduertens in te demum aliquid extitisse loci pudori,

† 2 pro-

4
probitati, atque virtuti, quod in singulos dies confirmatum ac-
cepimus. Quamobrem tot Magnatum, ac Principum sublimio-
ris ordinis cumulatissimam gratiam, haud sine multorum admi-
ratione quidē inijsisti; & quā frequenter accersitus, eosq; adire
coactus tam praelara praestisti; vt auxerit praesentia famam,
qui propterea te adeo illexerunt, vt vix te huc rediturum sine-
rent, magis existimantes, ut opinor iucundissimam consuetudi-
nem tuam, eruditissima eloquia, suauissimosque congressus,
quā voluptates omnes, rati profecto deinceps maiori cum se-
nore tuā operā uti posse. Si quid igitur vnquam prudenter egi,
hoc equidem, commemorati scilicet Auctoris hasce lucubratio-
nes, tuo nomini consecrassē. Id enim, qua cum tibi adstrinxeras
consuetudo, & singularia animi tui decora petebant, eo vel ma-
ximē quod Mathematicis quoq; disciplinis quando vacat ope-
ram impendis; nec illud sit in postremis me scilicet habere cui
plusquā tibi debeam, neminem, ob non vulgaria, quibus à te
sum humanissimē beneficia affectus. Reliquum igitur est Illu-
stris. Vir, ut hilari animo, serenaque fronte munus, quamuis
exiguū excipias, quod utique mihi sperandum, cū te non
prætereas illud Homeri ex *Odys.* 6.

Οὐ γὰρ καλὸν ἀνλωέσθαι δόσω ἐς ἄν
donum scilicet reicere haudquaquam decet, quamuis enim exi-
guum, pluribus tamen nominibus opportunum. Quod si perspe-
xero tibi gratum fuisse, dabo quidem operam in posterum omni
studio, omnique conatu, ut intelligas nil in delicijs magis mihi
contingere, quā tibi quidem inuisum non esse. Viue Nestoreos
annos incolumis, ut bonis artibus, ac disciplinis praesidio sis, &
ornamento.

Ratany, Anno à Virginis Partu MDCLXVIII. pridie Kal. Sept.

LECTORI

Geometrae Salutem.



Ecum aliquandò cogitabam, amice Lector, num Analytica cum suis quinque operationibus esset sufficiens, & generalis methodus inuestigandi omnes quantitatum proportionem, ut in initio suae Geometriae affirmare videtur Cartesius; si enim ita esset, possibile foret eius ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumq; hæc mente reuoluerem, facile percepi ex hæctenus repertis circuli proprietatibus nullam posse analysin institui tali structurae inseruientem: deinde mihi alias querenti incidit in mentem huius secunda, prima enim in circulo vulgo est cognita: ex hisce percepi seriem polygonorum conuergentem, cuius terminatio est circuli sector; ubi statim vidi aliquod analysios vestigium. deinde serierum conuergentium naturis non solum in facilibus quibusdam casibus, sed etiam in genere consideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipsim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium sectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc conuerterem ut polygonorum seriem conuergentem terminarem, insuperabilem difficultatem in eius terminatione inuenienda post omnes artis & alex conatus deprehendi: Sed animo reuolvens analysios officium esse sicut algebrae communis, non solum problemata resolvere, sed etiam eorum impossibilitatem (si

† 3 . opus.

opus sit) demonstrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus essem, ad secundum me conuerti, quod certè supra votum succescit; non enim solius circuli (quam mihi ab initio proposueram) sed omnium sectionum conicarum veram & legitimam in sua proportionum specie quadraturam, & integram proportionis speciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem saltem in relatione ad dimensionem sectionum conicarum ad commensurabilem vere quam proximam reduco, praxi facili, demonstrabili, & extractione radicis surdesolidæ (ni fallor) multo breuiore; in omni enim proportionem incommensurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: ut autem melius concipiamus huius proportionis naturam, loquamur de proportionem quatenus ortum habet à quinque operationibus analyticis, seu arithmetice vulgaris, proportio enim nobis notior est in numeris seu in quantitate discreta, quam in continua, neque vereor post Cartesium has operationes in geometriam adducere. Primò itaque sciendum est nos semper nobis proponere quantitates commensurabiles, seu quæ inter se sunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incommensurabilem nisi relatione ad commensurabilem nullo modo percipimus, habet enim in se nescio quid infiniti, mentem nostram obtundens & simplicem perceptionem impediens: deinde ex illis quinque operationibus arithmeticis, due sunt tantum simplices, additio & subtractio; multiplicatio enim est composita ex additione, & diuisio ex subtractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud est quam inuentio proportionis commensurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam in-

com-

3
 commensurabilem, componitur ex precedentibus quatuor; & nostra sexta operatio quæ in genere nihil aliud est quam inuentio proportionis commensurabilis, quàm proximè accedentis ad nostram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Aduertendum quoque est sicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, subductione, multiplicatione, sed tantum ex diuisione; & numeri incommensurabiles nunquam procedunt ex commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, diuisione, sed tantum ex radicum extractione; ita numeros, vel quantitates non analyticas nunquam prouenire ex analyticarum additione, subductione, multiplicatione, diuisione, radicum extractione, sed ex sexta hac operatione; ita ut hæc nostra inuentio addat arithmetice aliam operationem, & geometriæ aliam rationis speciem, idem enim est (sicut in hoc tractatulo demonstro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica seu illa rationis specie hætenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & eiusdem diametrum in commensurabilibus: Verum certè est me hanc demonstrationem integram ad phrasem geometricam non reduxisse, nam ut hoc perficiatur, opus est non paruo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter se relatione & incommensurabilitate in genere, quod miror nullum unquam scripsisse, cum in his tam late pateant inuentionum campi; nam ex his petenda est demonstratio, quod mesolabium non possit perfici ope regulæ & circini, item quod non semper & quando æquationes affectæ possunt reduci ad puras, item quod necessaria sit ad minimum talis generis curua ad mechanicam talium æquationum

re-

resolutionem, cum talibus innumeris, quæ à præstantioribus
geometris impossibilia esse deprehenduntur ex analysi, & à
rudioribus quotidie & frustra quærantur. Scripsit Euclides
decimum suum librum solummodo (nisi in paucis quibusdam
propositionibus generalibus) de incommensurabilitate facta ab
extractione radice quadratæ; neque quantum scio ab ullo
alio tractata est hæc materia, etiamsi geometriæ speculatiuæ
non solum utilisima sit, sed etiam maximè admirabilis; in
ipso enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fue-
rit progressio geometrica cuius unus terminus fuerit propo-
sitæ quantitati commensurabilis longitudine vel potestate qua-
cunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quod-
cunque, impossibile est duos totius progressionis terminos in-
finitum continuatæ esse inter se commensurabiles longitudi-
ne vel potestate quacunque: alia multa possem asserere, sed pro
commodiore fortassis tempore hæc referuo, satis existimans
pro præsentī hæc analyticè demonstrasse; etsi enim analysis as-
sensum adeò violenter non cogat ac geometria, nunquam ta-
men respuit nec respuere potest geometria, quod probauit semel
analysis geometrica. ex hac inuentione deduco quoque nouam
sectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem
quidem, in praxi expeditissimam & geometrica demonstra-
tione munitam; hæctenus enim logorithmorum constructio
prolixissima, coniectura potius quam scientia videbatur, &
diuisio anguli in partes æquales ultra quinque numero primo
numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia sum-
ma (qua possum) breuitate & perspicuitate demonstro; neque
scrupulosus sum in citationibus, utpote peregrinus & libris
ad

ad tale opus deflitutus, te enim suppono in geometricis non
mediocriter versatum, alioquin nullum hinc fructum colli-
ges restat. ut te admoneam me summam semper affectare in
demonstrando generalitatem, non solum in his sed etiam in
alijs a me editis; ita ut admirer R.P. Franciscum Eschi-
nardum e Societate Iesu in suo Dialogo optico Pag. 26. affir-
mare me demonstrasse in optica mea promotam, quod imago in
eodem videatur angulo ex vertice emersionis quo visibile ex
vertice incidentie, solummodo in lentibus ellipticis & hyper-
bolicis, nam non solum in illo, sed etiam in omnibus meis theo-
rematis precipuis e quibus tota deducitur opticae scientia ne-
pe 26. 27. 44. 45. 46. 47. 50. nihil dico nec suppono de ulla
particulari figura sicut cuius legenti parebit, extat enim
exemplar Romae in Bibliotheca Augustiniana. Verum certe
est in problematis me semper adhibere lentes, & specula ellip-
tica, & Hyperbolica, quippe exacta et geometriae conformia,
& in hoc allucinatur R. Vir quod problema a theoremate non
distinguerat, nam in suo dialogo, ne grauius dicam, nullum
extat problema. Illud quoque quod asserit pag. 54. Veritati
vix consentit, quod librum meum tum primum viderat dum
proprium illius opusculum esset ferè sub prelo, octo enim
Mensibus ante absolutam sui dialogi impressionem meum
apud se habuit, sicut testantur omnes in Romano Scotorum
collegio tunc studiosi, ubi ipse erat praefectus. doleo certe quod
Vir alioquin doctus pulchram opticae scientiam sedis sui dia-
logi erroribus disfigeret; nam in ipsa imaginis natura, quam
tot argumētis conatur probare se inuenisse ante uisa mea scri-
pta, turpiter alucinatur, dum imaginem distinguit a foco tan-

ta

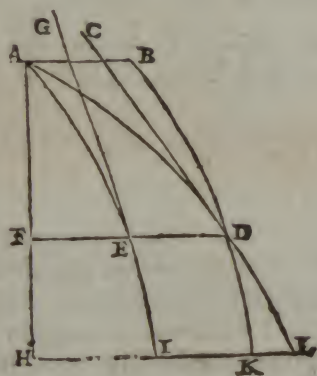
5
rationum philosophicarum farragine; in ipso enim casu ab illo exhibito, focus est vera, & legitima imago lentis obiectivæ, quod sensui apparebit, si in lente obiectiva pingantur literæ, earum enim imagines videbuntur clarissime depictæ in foco ubi asseritur nullam existere imaginem, sed tantum focum; unde patet non esse heterogeniorum mixtionem (sicut asserit Ille) sed lentis obiectivæ homogeneitatem, quæ efficit illam foci homogeneitatem: deinde pag. 36. negat radios in hyperbolæ focum exteriorem concurrentes axi unquam fuisse parallelos, etiam si à Cartesio firmissimè sit demonstratum; & pag. 22. magnopere prædicat ingentem illam difficultatem cognoscendi, quomodo de visibilis magnitudine iudicet sensus communis; etiam si ab omnibus doctioribus opticis (ni fallor) demonstratum & receptum sit, dum distantia percipitur, sensum communem iudicare (sicut docet trigonometria) ex distantia et angulo visorio, quæ si non percipiatur, sensum communem iudicare ex quantitate solius anguli visorii, seu imaginis in retina, hæc enim necessario coincidunt, si detur oculi centrum in eodem semper loco existens, quod ab omnibus supponitur. de his autem paulò liberius locutus sum, ut hinc admoneam matheseos studiosos, quam vanus sit conatus mathematica promovere ope fictilium rationum philosophicarum, quæ crudeli vulgi turmæ persuadendæ tantum sunt utiles; in Mathematicis enim nulla logica præter geometriam, nec philosophiæ quæ huius ope infallibilibus experientijs non superstruitur. Vale.

Ani-

Animadueto Prop. 5. Secunda Partis proposito nostro obscure admodum inservire, & ideo sequentem in eius loco substituo.

PROP. 5. THEOREMA.

Ad rectam AH ducantur duæ curvæ AI, AL ; sitque HIL recta perpendicularis rectæ AH : dico impossibile esse, ut (ducta ad libitum recta FED perpendiculari rectæ AH) rectæ tangentes GE, CD , semper sint parallelæ. Sumatur in recta IL punctum ad libitum K , sitque rectæ IK æqualis & parallela recta AB ; deinde per puncta B, K , ducatur curva congruens curvæ AI , si modo punctum A superponatur puncto



B & punctum I puncto L : manifestum est curvam BK secare curvam AL in aliquo puncto v. g. D ; si igitur GE, CD , sunt parallelæ, CD tanget curvam BK in puncto D ob curvarum AI, BK , congruentiam: sed CD ex suppositione tangit quoque curvam AL , quod est absurdum, quoniam curvæ AL, BK , se mutuo secant in puncto D ; tangentes igitur GE, CD , non sunt semper parallelæ, quod demonstrandum erat.

In partis secunda pag. 20. lin. 5. pro & demonstrabitur lege & semper demonstrabitur. Cetera errata, cum sensum non perturbent, facile corriget intelligens Lector.

NOI

NOI REFORMATORI
dello Studio di Padoua.

HAuendo veduto per fede del Padre Inquisitore di Padoua nel Libro intitolato *Vera Circuli, & Hyperbolæ Quadratura*, non esserui cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica; e parimente per attestato del Segretario nostro; niente contro Principi, e buoni costumi, concedemo licenza à gl' Heredi di Paolo Frambotti di poterlo stampare, offeruando gl'ordini, &c.

Dat. à 7. Aprile 1668.

(ALVISE CONTARINI Cau. Proc. Ref.

(ANGELO CORRER Cau. Proc. Ref.

(NICOLO SAGREDO Cau. Proc. Ref.

Angelo Nicolosi Segr.

DOMINICVS CONTARENO Dei Gratia Dux Venet. &c. Vniuersis, & singulis Representantibus nostris quibuscumque ad quos hæ nostre peruenierint significamus hodie in Consilio nostro Rogatorum captum fuisse ut infra videlicet. Che per effetto di gratia sia concesso priuilegio à Giacomo Gregorio Abredonense Scoto, che altri, che lui, ò chi hauerà causa da lui (cioè li Frambotti) per dieci anni non possa far stampar il Libro intitolato. *Vera Circuli, & Hyperbolæ Quadratura, & Geometria pars Vniuersalis inseruiens quantitatum Curuarum transmutationi, & mensuræ*; & stampato non possa alcuno tenerlo, ò venderlo in pena della perdita di tutti gli esemplari, quali siano del sudetto Auttore, e di Ducati trecento applicati, vn terzo all'Accusatore, vn terzo al Mag. ò Reggimento, che farà l'esecutione, & l'altro terzo all'Arsenal nostro, come consigliano li Reformatori dello Studio di Padoua nelle risposte hora lette, douendo massime soccombere à molti dispendij nella stampa dello stesso Libro. *Quare auctoritate supradicti Consilij mandamus vobis, vt ita exequi debeatis.*

Dat. in Nostro Duc. Palatio die XIV. Aprilis Ind. 6. M. DC. LXVIII.

Gio. Giacomo Corniani Segr.

DEFINITIONES

- S**I in circulo, ellipse vel hyperbola ducantur ϵ in eius perimetrum duæ rectæ, appellamus num ab illis rectis & perimetri segmento comprehensum, sectorem.
- 2 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quocumque subtendatur, ita ut triangula rectilinea (quorum communis vertex est sectionis centrum & bases rectæ subtendentes) sint equalia; vocamus rectilineum illud ab istis triangulis conflatum, polygonum regulare inscriptum, si sectio conica fuerit circulus vel ellipsis; quod si fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumscriptum.
 - 3 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quocumque tangatur & à tactibus ad sectionis centrum ducantur rectæ; si inquam omnia trapezia, à tangentibus proximis & rectis ad centrum comprehensa, fuerint equalia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumscriptum, si sectio conica sit ellipsis vel circulus, & polygonum regulare inscriptum si fuerit hyperbola.
 - 4 Si omnes anguli (excepto illo ad sectionis centrum) polygoni regularis à subtendentibus comprehensi insistant omnibus contactum punctis polygoni regularis à tangentibus comprehensi, appello hæc polygona complicata.
 - 5 Quantitatem dicimus à quantitibus esse compositam; cum à quantitatum additione, subtractione, multiplicatione, diuisione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.
 - 6 Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subtractione, multiplicatione, diuisione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.
 - 7 Quando quantitates à quantitibus inter se commensurabilibus analyticè componi possunt, dicimus illas esse inter se analyticas.

B

8 Si

Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eadem omnino methodo & iisdem operationibus quibus antè componebatur X, positis quantitatibus F, G, loco quantitatuum A, B, si inquam hoc fiat, dicimus quantitatem X eodem modo componi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia sit minor differentia quantitatuum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D, & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D, & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitatibus A, B, componatur G à quantitatibus F, E, & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F, atque ita continuetur series: appello hanc seriem, seriem conuergentem.

Eius termini iuxta se positi nempe A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini conuergentes.

PETITIONES.

Petimus quantitates, a quantitatibus datis intrinsece analyticis analyticè compositas, esse inter se & cum quantitatibus datis analiticas.

Item quantitates, quæ a quantitatibus datis inter se analyticis non possunt analyticè componi, non esse cum quantitatibus datis analiticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortassis obscuræ videntur, sed tamen ex analyseos elementis sunt satis manifestæ.

Vera

Vera

CIRCVLI ET HYPERBOLÆ
Quadratura.

Sit circuli, ellipseos vel Hyperbolæ segmentum BIP cuius centrum A : compleatur triangulum ABP , & segmentum in punctis, B, P , tangentes ducantur rectæ BF, PF , se inuicem secantes in puncto F ; producat (si opus sit) recta AF segmentum interfecans in puncto I & rectam BP in puncto Q ; deindè iungantur rectæ BI, PI .

PROP. I. THEOREMA.

Dico trapezium $BAP I$ esse medium proportionale inter trapezium $BAP F$, & triangulum BAP .

Quoniam recta AQ ducitur per F concursum duarum rectarum FB, FP , segmentum in punctis B, P , tangentium, igitur recta AQ rectam BP contactum puncta iungentem bifariam secabit in puncto Q ; & proindè triangulum ABQ est æquale triangulo AQP , & triangulum FBQ triangulo FQP ; & igitur triangulum ABF æquale est triangulo APF ; est ergò triangulum ABF dimidium trapezii $ABFP$: eodem modo probatur triangulum ABI esse dimidium trapezii $ABIP$; & triangulum ABQ est dimidium trianguli ABP : cumque triangula ABF, ABI, ABQ , eandem habeant altitudinem, inter se sunt ut bases, sed eorum bases nempe AF, AI, AQ , sunt continuè proportionales; & igitur ipsa quoque triangula sunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia $ABFP, ABIP$, & triangulum ABP sunt continuè proportionalia in ratione AF ad AI , quod demonstrare oportuit.

B 2 Duca-

12
Deducatur recta DL segmentum tangens in puncto I, & re-
ctis BF, PF, occurrens in punctis D, L, ita ut compleatur po-
lygonum ABDLP:

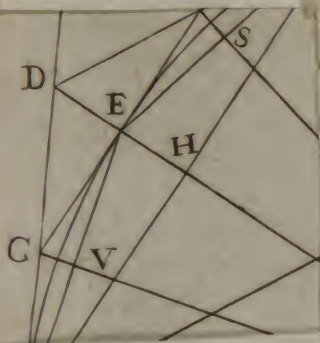
PROP. II. THEOREMA.

*Dico trapezia ABFP. ABIP simul, esse ad duplum trapezii
ABIP, sicut trapezium ABFP ad polygonum
ABDLP.*

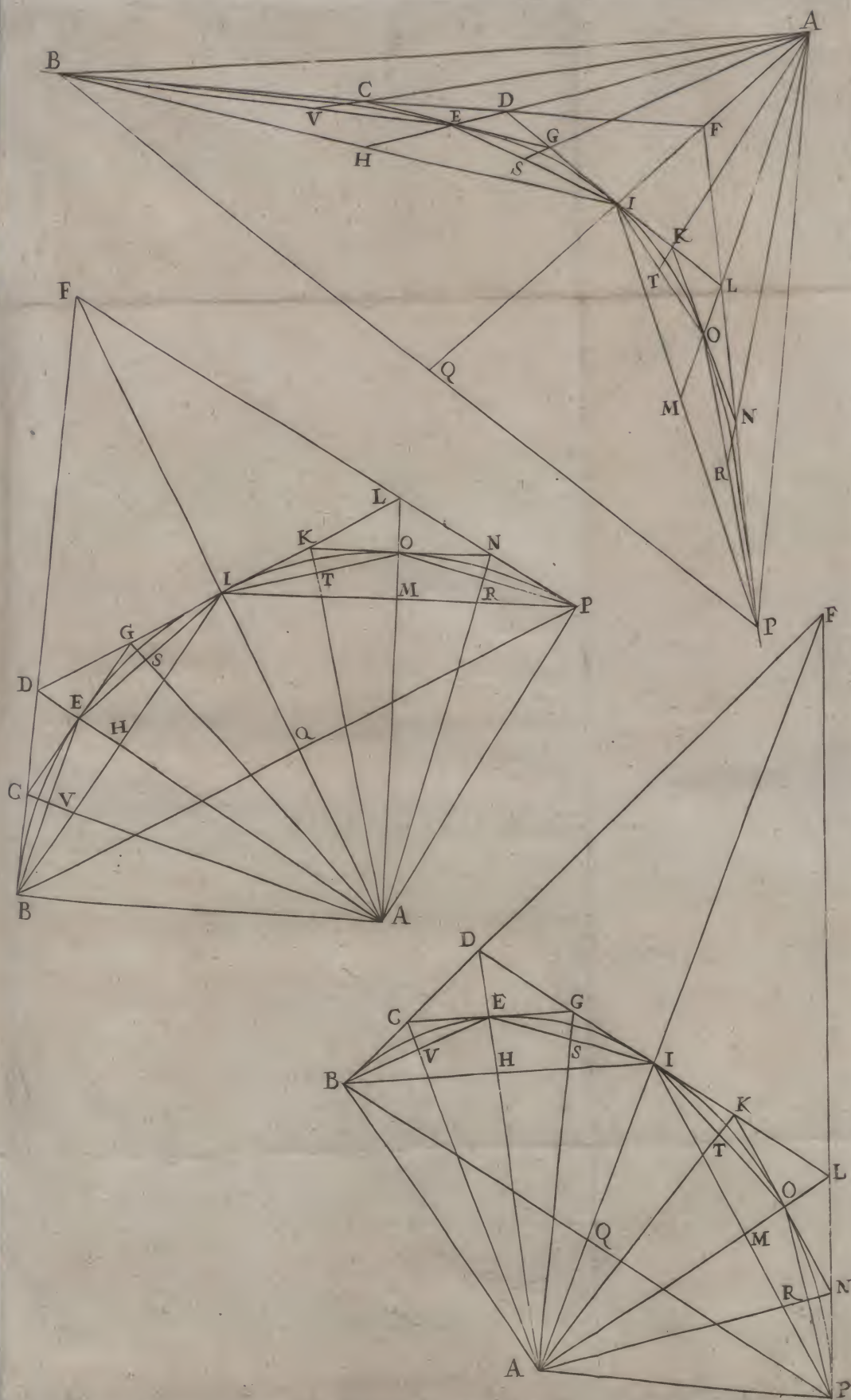
Quoniam recta AF, ducta per contactum rectæ DL cum
segmento, ducitur etiam per concursum duarum re-
ctarum FB, FP, rectam DL terminantium & seg-
mentum in duobus punctis tangentium; igitur recta DL bi-
fariam secatur in puncto I; & proinde triangulum FDI equa-
le est triangulo FIL, at triangulum ABF æquale est trian-
gulo APF; & igitur trapezium ABDI æquale est trapezio
APLI; trapezium ergo APLI dimidium est polygoni AB
DLP. ducatur recta AL: manifestum est ex præcedentis de-
monstratione triangulum AIL esse æquale triangulo ALP;
sed ut triangulum ALF ad triangulum ALI ita FA ad AI,
& ut FA ad AI ita trapezium ABFP ad trapezium ABIP; &
igitur ut trapezium ABFP ad trapezium ABIP; ita trian-
gulum ALF ad triangulum ALI; & componendo, ut trape-
zia ABFP, ABIP simul, ad trapezium ABIP, ita triangu-
lum AFL & triangulum AIL simul, hoc est triangulum AFP,
ad triangulum AIL: & consequentes duplicando, ut trape-
zia ABFP, ABIP simul, ad duplum trapezii ABIP, ita trian-
gulum AFP, ad trapezium AILP: at triangulum AFP
est dimidium trapezii ABFP, & trapezium AILP est dimi-
dium polygoni ABDLP; & igitur ut trapezia ABFP, ABIP
simul, ad duplum trapezii ABIP, ita trapezium ABFP ad
polygonum ABDLP, quod demonstrare oportuit.

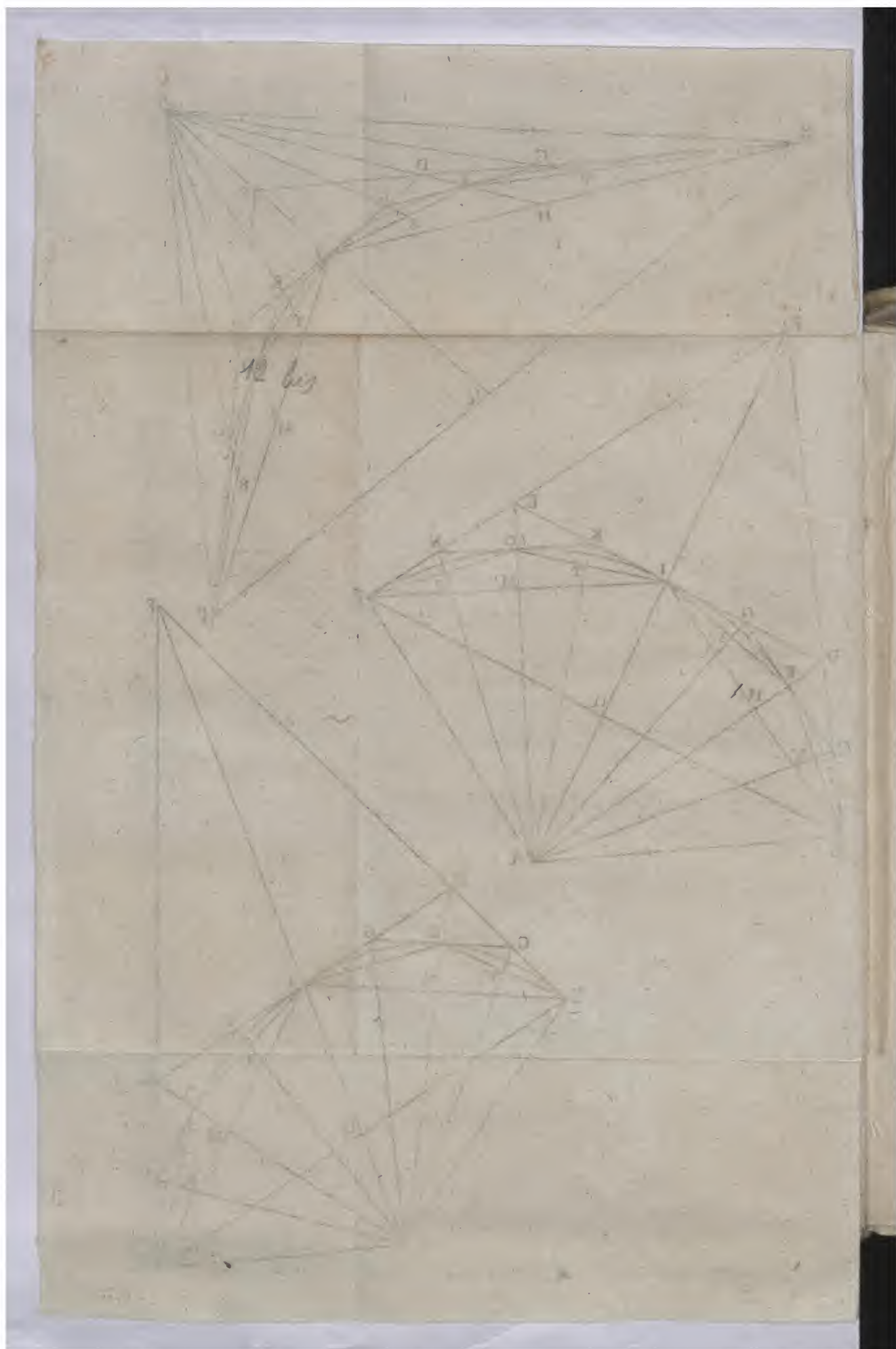
PROP.

12 leg



E A natus prima manifestum est trapezium A I L P,
 trapezium A I O P & triangulum A I P esse
 conti-





I
&
ly



PROP.

PROP. III. THEOREMA.

*Dico triangulum BAP, & trapezium ABIP simul, esse
ad trapezium ABIP, ut duplum trapezii ABIP
ad polygonum ABDLP.*

IN antecedente demonstratum est trapezia ABFP, ABIP simul, esse ad duplum trapezii ABIP, sicut trapezium ABFP ad polygonum ABDLP: & permutando trapezia ABFP, ABIP simul, sunt ad trapezium ABFP, ut duplum trapezii ABIP ad polygonum ABDLP. & quoniam trapezium ABFP, trapezium ABIP & triangulum ABP, sunt continuè proportionalia; erit trapezium ABIP ad trapezium ABFP, ut triangulum ABP ad trapezium ABIP; & componendo, ut trapezia ABIP, ABFP simul, ad trapezium ABFP, ità triangulum ABP & trapezium ABIP simul, ad trapezium ABIP: erat autem, ut trapezia ABIP, ABFP, simul, ad trapezium ABFP, ità duplum trapezii ABIP ad polygonum ABDLP; & igitur ut triangulum ABP & trapezium ABIP simul, ad trapezium ABIP, ità duplum trapezii ABIP ad polygonum ABDLP, quod demonstrare oportuit.

Producantur (si opus sit) rectæ AD, AL, segmentum secantes in punctis E & O, & rectas BI, IP, in H & M: deindè iungantur rectæ BE, EI, IO, OP, ut compleatur polygonum ABEIOP.

PROP. IV. THEOREMA.

*Dico polygonum ABEIOP esse medium proportionale
inter polygonum ABDLP & trapezium
ABIP.*

EX huius prima manifestum est trapezium AILP, trapezium AIO P & triangulum AIP esse
conti-

14
 continuè proportionalia, & ex prædictis satis facillè colligi
 potest trapezium AILP esse dimidium polygoni ABDLP
 & trapezium AIOP esse dimidium polygoni ABEIOP &
 triangulum AIP esse dimidium trapezii ABIP: & proindè
 terminos duplicando, polygonum ABDLP, polygonum
 ABEIOP & trapezium ABIP sunt continuè proportionalia,
 quod demonstrare oportuit.

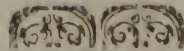
Ducantur rectæ CG, KN, segmentum tangentes in pun-
 ctis E, O, & rectis DL, DB, LP, occurrentes in punctis C, G,
 K, N, vt compleatur polygonum ABCGKNP.

PROP. V. THEOREMA.

*Dico trapezium ABIP & polygonum ABEIOP simul, esse ad
 polygonum ABEIOP, vt duplum polygoni ABEIOP
 ad polygonum ABCGKNP.*

EX huius tertia manifestum est triangulum ABI & trape-
 zium ABEI simul, esse ad trapezium ABEL, vt duplum
 trapezii ABEI ad polygonum ABCGI: & ex prædictis fa-
 cillè concludi potest triangulum ABEL esse dimidium trape-
 zii ABIP, & trapezium ABEI esse dimidium polygoni A
 BEIOP, & polygonum ABCGI esse dimidium polygoni
 ABCGKNP; & proindè terminos duplicando, trapezium
 ABIP & polygonum ABEIOP simul, erunt ad polygonum
 ABEIOP vt duplum polygoni ABEIOP ad polygonum A
 BCGKNP, quod demonstrandum erat.

Hinc facillè colligi potest polygonum ABCGKNP esse
 medium harmonicum inter poligona ABEIOP, ABDLP,
 quod hic admonuisse sufficiat, in sequentibus enim demon-
 strabitur.



SCIO.

SCHOLIUM.

D Væ præcedentes propositiones eodem modo demonstrari possunt de duobus quibuscunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, ABDLP; polygonum enim à tangentibus comprehensum tot continet æqualia trapezia, quot continet polygonum à subtangentibus comprehensum æqualia triangula: atque hinc evidens est itas polygonorū analogias ita se habere in infinitum, ducendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intra & extra semper scribendo: notandū nos appellare hanc polygonorū inscriptionē & circumscriptionē, inscriptionē & circumscriptionē subduplā. ex prædictis patet (si ponatur triangulum $ABP = a$, & trapezium $ABFP = b$) trapezium ABIP esse $\frac{a+b}{2}$ & polygonum ABDLP $\frac{a+b}{2}$: eodem

modo posito trapezio ABIP $= c$, & polygono ABDLP $= d$, erit polygonum ABEIOP $= \frac{c+d}{2}$ & polygonum ABCGKNP $= \frac{c+d}{2}$, ita ut evidens sit hanc polygonorum

seriem esse convergentem; atque in infinitum illam continuando, manifestum est tandem exhiberi quantitatem sectori circulari, elliptico vel hyperbolico ABEIOP æqualem; differentia enim polygonorum complicatorum in seriei continuatione semper diminuitur, ita ut omni exhibita quantitate fieri possit minor, ut in sequentis theorematis Scholio demonstrabimus: si igitur prædicta polygonorum series terminari posset, hoc est, si inveniretur ultimum illud polygonum inscriptum (si ita loqui liceat) æquale ultimo illi polygono circumscripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: sed quoniam difficile est, & in geometria omnino fortasse inauditū tales series terminare; præmittendæ sunt quædam propositiones è quibus inveniiri possint huiusmodi aliquot serierum terminationes, & tandem (si fieri possit)

186
 possit (generalis methodus inueniendi omnium serierum
 conuergentium terminationes.

PROP. VI. THEOREMATA.

*Dico differentiam inter triangulum ABP & trapezium ABFP
 maiorem esse duplo differentie inter trapezium
 ABIP & polygonum ABDLP.*

Sit triangulum ABP A; trapezium ABFP, B; trapezium
 ABIP, C, & polygonum ABDLP, D: quoniam A
 est ad C vt C ad B, igitur vt differentia inter A & C ad
 A, ita differentia inter C & B ad C; & permutando, vt diffe-
 rentia inter A & C ad differentiam inter C & B ita A ad C;
 & componendo, vt differentia inter A & C & differentia in-
 ter C & B simul, hoc est differentia inter A & B, ad differen-
 tia inter C & B, ita A + C ad C; sed vt A + C ad C ita 2 C
 ad D, & ideo differentia inter A & B est ad differentiam in-
 ter C & B vt 2 C ad D. quoniam A + C est ad C vt 2 C ad D,
 erit permutando vt A + C ad 2 C ita C ad D; & diuidendo,
 vt differentia inter A & C ad 2 C ita differentia inter C & D
 ad D; & permutando, differentia inter A & C est ad differen-
 tia inter C & D vt 2 C ad D; sed demonstratum est differen-
 tiam inter A & B esse ad differentia inter C & B vt 2 C ad D;
 & proinde differentia inter A & B est ad differentia inter C &
 B, vt differentia inter A & C ad differentiam inter C & D; sed
 differentia inter A & B est maior differentia inter C & B, &
 ideo differentia inter A & C est maior differentia inter C &
 D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A
 & B est ad differentiam inter A & C, vt differentia inter C & B
 ad differentia inter C & D; at differentia inter A & B est mai-
 or differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B est
 maior differentia inter C & D; atque differentia inter A & B
 æqualis est differentijs, inter A & C, inter C & B; cumque
 earum vtrauis sit maior differentia inter C & D, manifestum
 est differentiam inter A & B maiorem esse duplo differentie
 inter

inter C & D, hoc est differentiam inter triangulum ABP & trapezium ABFP maiorem esse duplo differentiae inter trapezium ABIP, & polygonum ABDLP, quod demonstrare oportuit.

SCHOLIUM.

Eodem prorsus modo demonstratur differentiam inter trapezium ABIP & polygonum ABDLP maiorem esse duplo differentiae inter polygonum ABEIOP & polygonum ABCGKNP. denique eodem modo demonstrari potest hic differentiarum excessus in subdupla nostra polygonorum complicatorum descriptione in infinitum; differentia enim priorum nempe inscripti & circumscripti maior semper erit duplo differentiae immediatè sequentium nimirum inscripi quoque & circumscripti, & proinde aufertur maius quam dimidium a priorum differentia ut fiat differentia immediatè sequentium; & igitur continuando subduplam polygonorum descriptionem, inueniri possunt duo polygoni complicata, quorum differentia sit minor qualibet exhibita quantitate, ut in præcedentis Scholio assumpsimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ ^a minor ^b maior, sintque datæ duæ rationes maioris inequalitatis ^c ad ^d, & ^c ad ^e; deinde sit ut ^c ad ^d ita ^b — ^a ad $\frac{bd - ad}{c}$ cui addatur quantitas ^a ut fiat $\frac{ca + bd - ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediatè sub ^a fiatque ut ^c ad ^e ita ^b — ^a ad $\frac{be - ae}{c}$, quæ quantitas substrahatur ex ^b & relictum nempe $\frac{bc - be + ae}{c}$ ponatur sub ^b. cōtinuetur deinde series conuergens cuius primi termini ^c ^e $\frac{ca + bd - ad}{c}$ $\frac{bc - be + ae}{c}$ conuergentes sunt ^a, ^b, & secundi termini conuergentes $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$ manifestum est terminum $\frac{ca + bd - ad}{c}$ maiorem esse termino ^a, quoniam

18.
 niam termino a additur $\frac{bd - ad}{c}$ vt fiat terminus $\frac{ca + bd - ad}{c}$.
 manifestum quoque est terminum $\frac{ca + bd - ad}{c}$ minorem esse
 termino b , quoniam differentia inter a & b est ad differentia
 inter a & $\frac{ca + bd - ad}{c}$ in ratione maioris inæqualitatis: euidens
 quoque est terminum $\frac{bc - be + ac}{c}$ minorem esse termino b ,
 quoniam ex b subtrahitur $\frac{bc - ac}{c}$ vt fiat $\frac{bc - be + ac}{c}$; mani-
 festum etiam est terminum $\frac{bc - be + ac}{c}$ maiorem esse termino
 a , quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter
 $\frac{bc - be + ac}{c}$ & b in ratione maioris inæqualitatis: euidens igitur
 est differentiam inter terminos conuergentes a & b ma-
 iorem esse differentia inter terminos cōuergentes $\frac{ca + bd - ad}{c}$
 & $\frac{bc - be + ac}{c}$. sed quoniam termini conuergentes a & b po-
 nuntur indefiniti, possunt a & b sumi loco quorumlibet ter-
 minorum conuergentium totius huius seriei; & positis a & b
 pro terminis huius seriei conuergentibus quibuscūque, se-
 quitur necessario ex seriei cōpositione $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ac}{c}$
 esse terminos conuergentes immediatè sequentes: cumque
 differentia terminorum a & b maior sit differentia termi-
 norū $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & $\frac{bc - be + ac}{c}$, euidens est differentiam termi-
 norum conuergentium priorum semper esse maiorem diffe-
 rentia terminorum conuergentium immediatè sequentium;
 & igitur quò magis continuatur hæc series conuergens eo
 minor fit differentia terminorum conuergentium: & quo-
 niam hæc differentiarum deminutio semper fit proportio-
 naliter nempe in ratione $b - a$ ad $\frac{bc - be + ac - ca - bd + ad}{c}$; igitur
 possunt inueniri huius seriei termini conuergentes quo-
 rum differentia sit omni exhibita quantitate minor; & igitur
 ima-

19
 imaginando hanc seriem in infinitum continuari, possumus
 imaginari ultimos terminos cōuergentes esse equales, quos
 terminos equales appellamus seriei terminationem.

PROP. VII. PROBLEMA.

Oportet prædictæ seriei terminationem inuenire.

VT huic problemati satisfiat, oportet primò inuenire
 quantitatem quæ eodem modo componitur ex termi-
 nis conuergentibus a, b , quo ex terminis conuergentibus
 $\frac{ca + bd}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$, hoc autem facillè fit hoc modo: inue-

nitur quantitas quæ multiplicata in a & addita b multipli-
 cata in quantitatem datam m , eandem quantitatem facit ac
 si multiplicaretur in $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & adderetur $\frac{bc - be + ae}{c}$ mul-

tiplicata etiã in eandem quantitatem datam m . fit quantitas il-
 la z , & proindè $za + bm$ æquatur $\frac{zca + zbd - zad + mbc - mbe + mac}{c}$,

& æquatione reducta inuenitur $z = \frac{mac - mbe}{ad - bd}$; quæ quanti-

tas siuè multiplicata in a & addita mb , siuè multiplicata in
 $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & addita $\frac{mbc - mbe + maec}{c}$ efficit eandem in vtroque

casu quantitatem nempè $\frac{maec - mbec + mbad - mbbd}{cd - bd}$; & proin-

dè prædicta quantitas eodem modo componitur ex terminis
 conuergentibus a, b , quo componitur ex terminis conuer-
 gentibus $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$, atque a & b quoniam sunt

quantitates indefinitæ possunt esse quilibet totius seriei ter-
 mini conuergentes, modò termini conuergentes immediatè
 sequentes sint $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & $\frac{bc - be + ae}{c}$ & proindè quantitas

$\frac{maec - mbec + mbad - mbbd}{cd - bd}$ eodem modo cōponitur ex quib.

libet totius seriei terminis conuergentibus quo componitur
 ex terminis conuergentibus a, b ; & igitur prædicta quantitas
 eodem

20
 eodem etiam modo componitur ex ultimis eius terminis
 convergentibus, qui æquales sunt: sit ultimus ille terminus x
 qui multiplicatus in $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ & in m efficit xm & $\frac{xmae - xmbc}{ad - bd}$,
 quorum factorum summa nēpē $\frac{xmae - xmbc + xmad - xmbd}{ab - bd}$ equa-
 tur $\frac{mae - mbe + mbad - mbbd}{ad - bd}$, & equatione reducta invenitur x
 seu seriei terminatio $\frac{a - b + b^2 - b^3}{a - b + b^2 - b^3}$, quam invenire o-
 portuit.

Nē minùs exercitatis obscurum videatur hoc problema;
 illud in numeris illustrabimus: sit $c 7, d 2, e 3, a 2, b 4$, erunt se-
 cundi termini convergentes $32, 36$, tertij $33\frac{1}{7}, 34\frac{2}{7}$, & eius
 terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moueat, quod (etiamsi a sit minor quam b)
 $\frac{ca + bd - ad}{c}$ possit esse maior quam $\frac{bc - be + c^2}{c}$, analyticè enim
 maior à minore potest subtrahi, cuius tamen exemplum
 non grauabimur exhibere, sit $c 7, d 5, e 4, a 2, b 4$; erunt secū-
 di termini convergentes $38, 34$, & tertij $35\frac{1}{7}, 36\frac{2}{7}$, eiusq; ter-
 minatio $35\frac{7}{9}$.

Animaduertendum est huius problematis solutionem
 eodem modo se habere, etiamsi loco a ponatur cyphra seu
 merum nihil, Ex Gr; sit $c 8, d 3, e 4, a 0, b 24$; erunt secū-
 di termini convergentes $9, 12$, & tertij $10\frac{1}{8}, 10\frac{1}{7}$, & seriei ter-
 minatio $10\frac{2}{7}$.

Harum etiam serierum terminationes possunt inveniri ex
 Gregorij a S. Vincentio lib. de progress. geometrica, etiamsi
 methodo longè ab hac diuersa.

PROP.

PROP. VIII. PROBLEMA:

*Sint due quantitates data A, B, & ratio qualibet data C ad D:
oportet inuenire aliam quantitatem, vt ratio eius
ad A sit multiplicata rationis B ad A in
ratione C ad D.*

S It primò ratio C ad D commen-
surabilis, sitque inter C & D
communis mensura E; & quoties E continetur in D toties sit
ratio F ad A submultiplicata rationis B ad A; & quoties E
continetur in C toties sit ratio G ad A multiplicata rationis
F ad A: dico G esse quantitatem illam quæ sitam. ratio G ad
ad A est multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ra-
tio F ad A est multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D;
& igitur ex æqualitate, ratio G ad A est multiplicata ratio-
nis B ad A in ratione C ad D, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio C ad D sit incommensurabilis, geometri-
cam huius problematis praxem esse impossibilem mihi per-
suadeo; approximatione tamen fieri potest, assumendo ra-
tionem commensurabilem eius loco, quæ quàm proximè ad
illam accedat.

Sit series conuergens, cuius
primi termini conuergentes
sint A, B, secundi C, D, tertij E,
F; sin'que secundi termini ita
facti à primis, vt ratio B maio-
ris ad A minorem sit multipli-
cata rationis C ad A in ratione data maioris inæqualitatis
M ad N, & vt ratio B ad A sit multiplicata rationis D ad A in
ratione data maioris inæqualitatis M ad O: sintq; tertij ter-
mini eodem modo facti ex secundis quò secundi facti sunt
ex primis; atque ita continuetur series.

EDC AFBG

		G H	A B
N		I K	C D
M		R S	E F
O		T V	X Y
		L	Z

PROP.

PROP. IX. PROBLEMA:

Oportet predicta seriei terminationem inuenire.

PONatur G cyphra seu nihil hoc est exponens rationis qualitatis, seu rationis A ad A; sitque H ad libitum, exponens rationis B ad A: sit ut M ad N ita differentia inter G & H, hoc est ipsa H vel exponens rationis B ad A ad excessum quo I superat G hoc est ipsam L, sed ut M ad N ita ratio B ad A est multiplicata rationis C ad A; & igitur Excessus quo I superat G hoc est ipsa I est exponens rationis C ad A. sit ut M ad O ita differentia inter G & H hoc est H ad excessum quo K superat G hoc est ipsam K, sed ut M ad O ita ratio B ad A est multiplicata rationis D ad A, cumque H sit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: si igitur I sit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit excessus quo K superat I exponens rationis D ad C. deinde sit ut M ad N ita excessus quo K superat I seu exponens rationis D ad C ad excessum quo R superat I, sed ut M ad N ita ex seriei compositione ratio D ad C est multiplicata rationis E ad C, atque excessus quo K superat I est exponens rationis D ad C; & proinde excessus quo R superat I est exponens rationis E ad C, atque I est exponens rationis C ad A, & proinde R est exponens rationis E ad A. deinde sit ut M ad O ita excessus quo K superat I ad excessum quo S superat I, sed ut M ad O ita ex seriei compositione ratio D ad C est multiplicata rationis F ad C, cumque excessus quo K superat I sit exponens rationis D ad C; erit excessus quo S superat I exponens rationis F ad C, atque I est exponens rationis C ad A, & proinde S est exponens rationis F ad A; cum igitur R sit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit excessus quo S superat R exponens rationis F ad E; & utramque seriem continuando, demonstratur ut a quo T esse exponentem rationis X ad A, & V esse exponentem rationis Y ad A: denique semper demonstrabitur terminos convergentes

23

gentes seriei exponentium esse exponentes rationum, terminorum conuergentium seriei propositæ ad primam seriei quantitatem A, modò vtriusque seriei termini conuergentes sint in eodem ab initio ordine: & proindè terminatio seriei exponentium per huius 7 inuenta, quæ Ex: Gr: sit L, erit exponens rationis; terminationis seriei propositæ ad primum terminum A: inueniatur igitur ratio Z ad A quæ sit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæsitæ, quam inuenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illustrandū sit M 4, N 2, O 1, A 6, B 10; erunt secūdi termini conuergentes 1960, 1992160, tertij termini cōuergentes 19997776000, 1999910077696000000, & seriei terminatio 19360.

Aliud exemplum, sit M 6, N, 2, O 3, A 5, B 10; erunt secundi termini conuergentes 19256, 1950, tertij termini cōuergentes 1966488281250000000, 19967812500000, & seriei terminatio 1/12500. haftenus terminauimus omnes series conuergentes quæ fieri possūt vel à sola proportionē arithmetica vel à sola proportionē geometrica, nunc verò methodū aggredimur, cuius ope omnium serierum conuergentium terminationes (si modò sint in rerum natura) inueniri possunt.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate, eodem modo composita à duobus terminis conuergentibus cuiuscunque seriei conuergentis, quo componitur ex terminis conuergentibus eiusdem seriei immediatè sequentibus; seriei propositæ terminationem inuenire.

SIt series conuergens; cuius duo termini conuergentes quicunque sint a, b , & termini conuergentes immediatè sequentes $19ab, \frac{aa}{19ab}$ summa terminorū cōuergentiū $a + b$ multiplicata in terminū cōuergentē primū a efficit $aa + ab$: & summa terminorum conuergentiū immediatè sequentiū nempè

pè $\frac{aa}{vgab}$ multiplicata in primum terminum conuergentem $vgab$ efficit etiam $aa + ab$; ex his inuenienda sit seriei propositæ terminatio. manifestum est quantitatem $aa + ab$ eodem modo fieri à terminis conuergentibus a, b , quo à terminis conuergentibus immediatè sequentibus $vgab, \frac{aa}{vgab}$ &

quoniam quantitates a, b , indefinitè ponuntur pro quibuslibet totius seriei terminis conuergentibus, euidens est summam quorumcunque terminorum conuergentium propositæ seriei multiplicatam in primum terminum conuergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à summa terminorum conuergentium immediatè sequentium multiplicata etiam in primum suum terminum conuergentem; cumque duo termini conuergentes duos terminos conuergentes semper immediatè sequuntur, manifestum est summam duorum quorumlibet terminorum conuergentium multiplicatam in primum semper efficere eandem quantitatem nempe $aa + ab$, atque vltimi termini conuergentes sunt æquales, & proinde sit vltimus ille terminus seu seriei terminatio z , quæ sibi addita & in summam multiplicata efficit $z + z$, quæ quantitas debet esse æqualis quantitati $aa + ab$, & æquatione resoluta dabitur z seu seriei terminatio $\frac{aa + ab}{2}$, quam inuenire oportuit.

Et proinde ad inueniendam cuiuscunque seriei conuergentis terminationem; opus est solummodo inuenire quantitatem eodem modo compositam ex terminis conuergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis conuergentibus secundis.

CON SECTARIVM.

Quoniam non refert in problemate siuè termini conuergentes a, b , sint primi, secundi, vel tertij &c., manifestum est omnes seriei conuergentis terminationem eodem modo esse compositam ex terminis conuergentibus primis quo ex terminis conuergentibus secundis, tertijs, vel quartis, &c.

PROP.

PROP. XI. THEOREMA.

*Dico sectorem circuli, ellipseos vel hyperbola ABIP
non esse compositum analyticè à triangulo ABP,
& trapezio ABFP.*

Ponatur triangulum ABP a & trapezium ABFP b : mani-
festum est ex prædictis trapezium ABIP esse \sqrt{gab} & po-
lygonum ABDLP $\frac{2ab}{a + \sqrt{gab}}$, item sectorem ABIP esse huius

seriei conuergentis terminationem. vt ex seriei terminis au-
feratur signa radices & fractionis, pro a & b primis seriei ter-
minis conuergentibus, hoc est pro triangulo ABP & trape-
zio ABFP ponantur $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$; eruntque se-
cundi seriei termini conuergentes, hoc est trapezium ABIP
& polygonum ABDLP, $ba^2 + b^2a$ & $2b^2a$. dico seriei con-
uergentis (cuius primi termini conuergentes sunt $a^3 + a^2b$,
 $ab^2 + b^3$ & secundi sunt $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$) terminationem
non esse compositam analyticè à terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$; si
enim componatur prædicta terminatio analyticè à terminis
conuergentibus $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$; componetur etiam ea-
dem terminatio analyticè & eodem omnino modo à termi-
nis conuergentibus $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; & proinde eadem qua-
ntitas nempe prædicta terminatio eodem modo componitur
analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur

ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$,
sed nulla quantitas potest

$$a^3 + a^2b \quad ab^2 + b^3.$$

eodẽ modo analyticè cõ-
poni ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur

$$ba^2 + b^2a \quad 2b^2a$$

ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, quod sic demonstro. si analy-
tycè cõponeretur quantitas ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$,
eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas
ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, subtrahendo, mul-
tiplicando & diuidendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & ra-

Dices

dicere ex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac si eodē modo adderentur, si bducerentur, multiplicarentur & diuiderentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, & radices eodē ex factis extraherentur, sed posterius fieri non potest ergo nec prius; minorem sic probo, si eadem fieret quantitas ex additione, subtractione, multiplicatione, diuisione & radicū extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, subtractione, multiplicatione diuisione & radicū extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quantitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis siuē ipsorum factis æquales quantitates subducendo, vel illos siuē ipsorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel diuidendo, vel denique illos siuē ipsorū factos eodem modo in se multiplicando, vel ex iisdem eadē radices extrahendo, hæc analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel vtrumque vel neutrum faciendo, fieri possent duo vltima producta, nempe vnum à termino $ab^2 + b^3$ & alterum à termino $2b^2a$; ita vt vltimū productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum vltimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ additum, subductum, multiplicatum, diuisum, & ex facto radice aliqua extracta (hæc analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel vtrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem, quam efficit vltimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum vltimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, subductum, multiplicatum, diuisum, & ex facto eadem etiam radice extracta, hæc analyticas operationes eodem omninò modo mutando, reiterando vel vtrumque vel neutrum faciendo; sed posterius est absurdum ergò & prius: sequela maioris patet ex octaua definitione huius, minor ē sic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur potestas ipsius a nempe a^3 , quæ est altior vlla potestate eiusdem a in termino $ba^2 + b^2a$; & proindē terminos $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, cum æqualibus quantitatibus addendo, subtrahendo, multiplicando, diuidendo, &c: si cut sepeius dictum est, semper manet potestas ipsius a in vltimo producto ex termino $a^3 + a^2b$ altior

altior potestate vlla ipsius a in vltimo producto termini $ba^2 + b^2a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, subtrahendo, &c, semper manet in factis eodem potestates, & illos in se eodem modo multiplicando semper magis eleuatur altior potestas in termino $a^3 + a^2b$ quam eleuatur depressior potestas in termino $ba^2 + b^2a$, & ex illis easdem radices extrahendo, vbi a fuerat eleuator in potestate erit etiam eleuator in radice: & quoniam eadem reperitur altissima potestas ipsius a in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2a$, demonstratur vt antè altissimam potestatem ipsius a in vltimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem esse cum altissima potestate ipsius a in vltimo producto ex termino $2b^2a$: in vltimo igitur producto termini $a^3 + a^2b$ reperitur altior potestas ipsius a quam in vltimo producto termini $ba^2 + b^2a$, & in vltimo producto termini $ab^2 + b^3$ altissima potestas ipsius a eadem est cum altissima potestate ipsius a in vltimo producto termini $2b^2a$; & igitur vltima producta ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter se addita, subducta, multiplicata, diuisa, &c. semper efficient quantitatem, in qua reperitur altior potestas ipsius a quam vlla quæ reperiri potest in quantitate facta ex eadem prorsus additione, subtractione, multiplicatione, diuisione, &c, productorum à terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam altior potestas cum altera potestate semper altiorē facit potestatem quam depressior potestas cum eadem altera potestate; & igitur istæ duæ quantitates non possunt esse indefinitè æquales, cum reperiaturs altior potestas ipsius a in vna quam in altera: atque hinc euidentius est quod sector circuli, ellipseos vel hyperbolæ ABIP non possit componi analyticè à triangulo ABP & trapezio ABFP, quod demonstrandum erat.

Vt autem euidentius fiat propositum, aliam demonstrationem breuiorem faciliorem & ex alio medio petitam hic subiungo: quantitas non potest componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam ad-

D 2 addendo,

dendo, subtrahendo, multiplicando, diuidendo duo binomia $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex ultimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in ultimo producto, quam si eodem modo adderentur, subducerentur multiplicarentur, diuiderentur, binomium $ba^2 + b^2a$ & simplex quantitas $2b^2a$, & eadem quoque radices ex facto extraherentur; & si plura sint nomina in vno producto quam in altero, impossibile est vt sint indefinitè æqualia, quod est propositum, reliqua enim ex priorè demonstratione haberi possunt.

S C H O L I V M :

Obscurū fortassis videbitur hoc theorema ob multas inusitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa supposita lemmata, quæ demonstrare pigebat, quoniā cuius analytæ vel prima lectione sunt obuia, ex natura enim operationū analyticarum omninò dependent,

Locus hic requirit vt aliquid dicā de proportionē inter triangulū ABP & sectorē ABIP; quod vt fiat, aduertendū est verissimū philosophorum axioma, nempe omnem nostram cognitionem à sensu ortum habere; inter proportionē enim, sola commensurabilis sensu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommensurabilis enim à mathematicis solūmodò ad huc cōtēplatur, quatenus cōmensurabilis cuiusdam rationis est subduplicata, subtriplicata, &c. vel ex talium additione, subductione, &c. genita: hoc est, quantitas quæ quantitati propositæ est incommensurabilis ex eo solūmodo ab humana mente cōtemplatur, quod ex aliquot quantitatū cognitarum & propositæ quantitati commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, diuisione & radicum extractione componi possit: at exactenus demonstratis manifestum est sectorē ABIP non posse componi ex additione, subductione, multiplicatione, diuisione, & radicum extractione trianguli ABP & trapezii ABFP: triangulū autē ABP & trapeziū ABFP supponimus esse quantitates inter se analyticas; & proindē sector ABIP illis analytica esse non potest, hoc est ex quantitatū
 ipsis

ipsis ABP, ABFP analyticarū additione, subtractione, multi-
 plicatione, diuisione & radicū extractione cōponi nō potest;
 & proinde ex hoc capite nulla potest exhiberi ratio inter tri-
 angulum ABP & sectorē ABIP, cum euidens sit illam nō es-
 se analyticam, sed dicet fortē aliquis rationem inter triangu-
 lum ABP & sectorem ABIP omnifariam variari posse; &
 proindē posse esse inter se in ratione qualibet data siuē ana-
 lytica siuē etiam commensurabili: respondeo hoc esse ve-
 rissimum, sed in hoc casu ratio inter triangulum ABP & tra-
 pezium ABFP non erit analytica; & proindē ex dato cir-
 culo ellipse vel hyperbolæ nūquam dabitur in analyticis tri-
 angulum ABP, quod ex prædictis clarissimē patet, etiamsi ex
 prædicto capite non possimus comprehendere rationem in-
 ter triangulum ABP & sectorem ABIP, possumus tamen eius
 aliquam habere cognitionem, ex eo quod sector ABIP sit
 terminatio seriei conuergentis datæ; & ex hac considera-
 tione possibile est inuenire quantitatem datę commensura-
 bilem cuius differentia à sectore ABIP minor fuerit quacū-
 que quantitate proposita, ad hoc enim semper recurrendum
 est, cū de quantitatibus quibuscunque incommensurabili-
 bus tractant practici, & in hac nostra approximatione praxis
 non erit operosior quam in multis aliis etiam quantitatum
 analyticarū approximationibus, immō multò breuior, faci-
 lior & paratior erit illis Vietæ sectionibus angularibus, quæ
 tamen summæ matheseos vtilitati in praxem reducuntur.
 non video ergò quare circuli quadratura diutius æstimetur
 ignorari; cum enim demonstratum sit rationem circuli ad
 diametri quadratum non esse analyticam, vanum certē erit
 & ineptum illam sicut talem imposterum quærere: at reie-
 ctis quātitatibus analyticis, vix credo vllam posse esse notio-
 rem hisce nostrarum serierum conuergentium terminatio-
 nibus, sicut ex sequentibus plenissimē apparebit.

PROP.

PROP. XII. THEOREMA.

Sit trapezium ABIP, A; polygonum ABEIOP, C; polygonum ABCG KNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D esse medium harmonicū inter C & B. ex huius 4, $A : C :: C : B$, & componendo $A \times C : C :: C \times B : B$, sed ex huius 5, $A \times C : C :: 2C : D$; & ideo $C \times B : B :: 2C : D$, & permutando $B \times C : 2C :: B : D$, & diuidendo, differentia inter B & C est ad $2C$, vt differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C est ad differentiam inter B & D vt $2C$ ad D, hoc est, vt $C \times B$ ad B, & diuidendo, differentia inter D & C est ad differentiam inter B & D vt C ad B; & proinde D est medium harmonicum inter C & B, quod demonstrare oportuit.

Hæc propositio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, vt patet ex scholio 5 huius.

PROP. XIII. THEOREMA.

Inter duas quantitates A, B, sit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, esse continue proportionales, quoniam A, E, B, sunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B vt A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiam inter E & B, vt $A \times B$ ad B; deinde permutando & componendo $2A : A \times B :: E : B$, sed $2A$ est duplum ipsius A & $A \times B$ duplum ipsius C; & ideo $A : C :: E : B$; & proinde $CE = AB$, & $AB = DD$, ideoq; $CE = DD$; & igitur $C : D :: D : E$, quod demonstrare oportuit.

PROP.

PROP. XIV. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipseos sectorem & B extra: continuetur series conuergens horum polygonorū complicatorum secundum nostram methodum subduplam descriptorum, ita ut polygona intra circulū sint A, C, E, &c, & extra circulum B, D, F, &c; dico $A \times E$ minorem esse quam $2C$: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ; prima quoniam A, C, B, sunt continue proportionales; & secunda quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales; & proinde excessus C supra A, hoc est $C - A$, est ad excessum D supra C seu $D - C$ in ratione cōposita ex proportionē A ad C & ex proportionē $A \times C$ ad A, hoc est in ratione $A \times C$ ad C; at $A \times C$ est maior quam C, & ideo excessus C supra A est maior quam excessus D supra C, est autem D maior quam E, & proinde excessus C supra A multo maior est quam excessus E supra C; est igitur $A \times E$ minor quam $2C$; quod demonstrare oportuit.

A	B
C	D
E	F

PROP. XV. THEOREMA.

Iisdem positis: dico excessum C supra A minorem esse quadruplo excessus E supra C. ex prædictis manifestæ sunt sequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, sunt continue proportionales; secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, sunt continue proportionales; & ideo excessus C supra A (hoc est) $C - A$ est ad excessum E supra C seu $E - C$, ut $AC \times EC$ ad $AE \times CC$ at B ma-

$C - A : B - C :: A : C$
$B - C : D - C :: A \times C : A$
$D - C : E - C :: E \times C : C$

ios

32
ior est quā E, & ideo AB seu CC maior est quam AE, & igitur AE * CC minor est quam 2CC: atq; AC * EC est ad 2CC ut A * E ad 2C, sed A * E minor est quam 2C; & ideo AC * EC minor est quam 2CC; proinde AC * EC * AE * CC minor est quam 4CC; & igitur C - A minor est quadruplo ipsius E - C, quod demonstrare oportuit.

PROP. XVI. THEOREMA:

Sint duo polygona complicata A, B; nempe A extra hyperbolæ sectoris & B intra: Continuetur series convergens horum polygonorum complicatorum secundum nostram methodū

A	B
C	D
E	F

subduplam descriptorum, ita ut polygona extra hyperbolem sint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A * E maiorem esse quam 2C. ex prædictis manifestæ sunt sequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, sunt continue proportionales; & secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales; &

proinde excessus A supra C, $A - C : C - B :: A : C$
hoc est A - C, est ad excessū C - B: C - D:: A * C: A
C supra D seu C - D, In ra-

tione composita ex proportionē A ad C & ex proportionē A * C ad A hoc est in ratione A * C ad C, at A * C est maior quam C & ideo excessus A supra C est maior excessu C supra D, est autem E maior quam D; & proinde excessus A supra C multo maior est excessu C supra E; manifestum est igitur A * E maiorem esse quam 2C, quod demonstrare oportuit.

PROP.

33

PROP. XVII. THEOREMA.

Iisdem positis: dico excessum A supra C maiorem esse quadruplo excessus C supra E. ex prædictis manifeste sunt sequentes tres analogiæ; prima, quoniam A, C, B, sunt continuè proportionales; secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, sunt continuè proportionales; & ideò excessus A supra C, hoc est, A - C, est ad excessum C supra E, hoc est C - E in ratione composita ex proportionibus A

ad C, A ✕ C ad A & E ✕ C A - C : C - B :: A : C

ad C; & ideò A - C est ad C - B : C - D :: A ✕ C : A

C - E, vt AC ✕ EC ✕ AE ✕ C - D : C - E :: E ✕ C : C

CC ad CC; at B minor est quàm

E, & ideò AB, seu CC minor est quàm AE; & igitur AE ✕ CC maior est quam 2 CC. atque AC ✕ EC est ad 2 CC vt A ✕ E ad 2 C; sed A ✕ E maior est quam duo C, & ideò AC ✕ EC maior est quam 2 CC; & proinde AC ✕ EC ✕ AE ✕ CC maior est quam 4 CC; & igitur A - C maior est quadruplo ipsius C - E, quod demonstrare oportuit.

PROP. XVIII. THEOREMA.

Sint due quantitates inæquales; A minor, B maior, E media geometrica, D media arithmetica. dico D maiorem esse quam C. quoniam B, C, A, sunt continuè proportionales; erit diuidendo, permutando, & componendo; vt excessus B supra A ad excessum C supra A, ita A ✕ C ad A, atque A ✕ C maior est duplo ipsius A; & proinde excessus B supra A maior est duplo excessus C supra A; sed excessus B supra A duplus est excessus D supra A, & ideò excessus D supra A maior est excessu C supra A; est igitur D maior quàm C, quod demonstrare oportuit.

E

PROP.

PROP. XIX. THEOREMA.

Idem positis; sit inter A & B media harmonica E. dico C maiorem esse quam E. ex huius 13; D est ad C vt C ad E, sed D maior est quam C; & ideo C maior est quam E, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

EX duabus precedentibus manifestum est D maiorem esse quam E, hoc est mediam arithmetica inter duas quantitates inaequales maiorem esse media harmonica inter easdem.

PROP. XX. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipseos sectorem, B extra. continetur series conuergens horum polygonorum complicatorum secundum methodum nostram subduplam descriptorum;

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
	Z	X

ita vt polygona intra circulum sint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; sitque seriei conuergentis terminatio seu circuli vel ellipseos sector Z. dico Z maiorem esse quam C vna cum triente excessus C supra A. sit excessus G supra C quarta pars excessus C supra A, & excessus H supra G quarta pars excessus G supra C; continueturque haec series in infinitum, vt eius terminatio sit X. Excessus C supra A minor est quadruplo excessus E supra C; & ideo excessus E supra C maior est excessu G supra C, est ergo E maior quam G. deinde excessus E supra C minor est quadruplo excessus K supra E, & ideo excessus G supra C multo minor est quadruplo excessus K supra E, est igitur excessus K supra E maior excessu H supra G; cumque E maior sit quam G, manifestum est K maiorem esse quam H: eodem prorsus modo demonstratur in omni seriei A, C, E, A, C, G, continuatione, terminum quem-

35

quemcunq; seriei A, C, E, maiorem esse quam idem numero terminus seriei A, C, G; & ideo terminatio seriei A, C, E, nempè Z maior erit terminatione seriei A, C, G, nempè X, ac ex Archimedis quadratura parabolæ constat X equalem esse ipsi C vna cum triente excessus C supra A, & proinde Z eadem maior est, quod demonstrare oportuit.

P R O P. XXI. T H E O R E M A.

Idem positis quæ supra; dico Z seu sectorem circuli vel ellipseos minorem esse quam maior duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B sit media Arithmetica G, & inter G & B sit media Arithmetica H; item inter G

A B
C D
E F
K L
Z

A B
G H
M N
O P
X

& H sit media Arithmetica M, & inter M & H sit media Arithmetica N; continueturque hæc series conuergens A, B, G, H, M, N, O, P, in infinitum, vt fiat eius terminatio X. satis patet ex prædictis G maiorem esse quam C, atque H media Arithmetica inter G & B maior est media harmonica inter easdem G, B; media autem harmonica inter G & B maior est quam D media harmonica inter C & B, quoniam G maior est quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B, hoc est H, maior est quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H maior est media geometrica inter easdem G & H; & quoniam G est maior quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H maior est quam E media geometrica inter C & D; & proinde M maior est quam E. deinde N media arithmetica inter M & H maior est media harmonica inter easdem, & quoniam H maior est quam D & M quam E, media harmonica inter M & H maior est quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F maior est. eadem modo vtramque seriem in infinitum continuando, semper demonstratur terminum quemli-

E 2

ber

bet seriei AB, CD, minorem esse quam idem numero terminus seriei AB, GH; & igitur terminatio seriei AB, CD, nempe Z minor erit terminatione seriei AB, GH, nempe X; atque ex huius 7, terminatio seriei AB, GH, seu X æqualis est maiori duarum mediarum arithmetice continue proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor est, quod demonstrandum erat.

PROP. XXII. THEOREMA:

Idem positis quæ supra; dico Z seu sectorem circuli vel ellipsos minorem esse quam maior duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B sit media geometrica G, & inter G & B sit media geometrica H; Item inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continueturque hæc series convergens A B, GH, MN, OP, &c, in infinitum, ut fiat eius terminatio X. satis patet ex prædictis C & G esse inter se æquales, item H maiorem esse quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H maior est quam E media geometrica inter C & D. deinde N media geometrica inter M & H maior est media harmonica inter easdem; & quoniam M maior est quam E & H maior quam D, erit media harmonica inter M & H maior quàm F media harmonica inter E & D; & ideo N media geometrica inter M & H maior erit quam F. eadem methodo utramque seriem in infinitum continuando semper demonstratur terminum quemlibet seriei AB, CD, minorem esse quam idem numero terminus seriei AB, GH; & igitur terminatio seriei AB, CD, nempe Z minor erit terminatione seriei AB, GH, nempe X; atque ex huius 9 terminatio seriei AB, GH, seu X, æqualis est maiori duarum mediarum geometricè continue proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
	Z		X

SCHO-

S C H O L I U M

Non opus est ut hic demonstrem maiorem duarum mediarum arithmetice continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates maiorem esse quam maior duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter easdem, & igitur huius propositionis approximationem præcedentis esse exactiorem, quod etsi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius utimur.

PROP. XXIII. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A extra hyperbolæ sectorem, B intra. continuetur series conuergens horum polygonorum complicatorum secundum methodum nostram subduplam descriptorum, ita ut polygo-

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

na extra hyperbolam sint A, C, E, K, &c, & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque seriei conuergentis terminatio seu hyperbolæ sector Z. Dico Z maiorem esse quam C dempto triente excessus A supra C. sit excessus C supra G quarta pars excessus A supra C, & excessus G supra H quarta pars excessus C supra G, continueturque hæc series in infinitum ut eius terminatio sit X. excessus A supra C maior est quadruplo excessus C supra E, & ideo excessus C supra E minor est excessu C supra G, est ergo E maior quam G. Deinde excessus C supra E maior est quadruplo excessus E supra K, & ideo excessus C supra G multò maior est quadruplo excessus E supra K, & igitur excessus G supra H maior est excessu E supra K; cūq; E maior sit quā G, manifestū est K etiā maiorem esse quam H: eodem prorsus modo demonstratur in omni seriei A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque seriei A, C, E, maiorem esse quam idem numero

mero terminus seriei A, C, G; & ideò terminatio seriei A, C, E, nempe Z, maior erit terminatione seriei A, C, G, nempe X; at ex Archimedis quadratura parabola constat X equalē esse ipsi C dempto triente excessus A supra C, & proinde Z eadem maior est, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXIV. THEOREMA.

Idem positis; dico Z seu se-
 & rem hyperbolę minorem
 esse quam minor duarum media-
 rum arithmetice continuē pro-
 portionalium inter A & B. Inter
 A & B sit media Arithmetica G, &
 inter G & B sit media arithmetica

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

H, Item inter G & H sit media Arithmetica M. & inter M & H sit media Arithmetica N: continueturque hæc series con-
 uergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, vt fiat eius termi-
 natio X. satis patet ex prædictis G maiorem esse quam C; at-
 que H media arithmetica inter G & B maior est media har-
 monica inter easdem G & B; media autem harmonica inter
 G & B maior est media harmonica inter C & B, nempe D,
 quoniam G maior est quam C; & ideò media Arithmetica
 inter G & B nempe H maior est quam D media harmonica
 inter C & B. eodem modo M media Arithmetica inter G &
 H maior est media geometrica inter easdem G & H; & quo-
 niam G est maior quam C & H quam D, media geometrica
 inter G & H maior est quam E media geometrica inter C &
 D; & proinde M maior est quam E. Deinde N media arith-
 metica inter M & H maior est media harmonica inter easdē;
 & quoniam H maior est quam D & M quam E, media har-
 monica inter M & H maior est quam F media harmonica in-
 ter E & D; & ideò N eadem F maior est. eodem modo vt a-
 que seriem in infinitum continuando, semper demonstra-
 tur terminum quēlibet seriei A B, C D, minorem esse quam
 idem numero terminus seriei A B, G H; & igitur terminatio
 seriei

seriei AB, CD, nempe Z, minor erit terminatione seriei AB, GH, nempe X; atque ex huius 7 terminatio seriei AB, GH, nempe X, æqualis est minori duarum mediarum arithmetice continue proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXV. THEOREMA.

Iisdem positis; dico Z seu sectorem hyperbole minorem esse quam minor duarum mediarum geometricè continue proportionalium inter A & B. Inter A & B sit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H, Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometrica

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

N; continueturque hæc series conuergens AB, GH, MN, OP, &c, in infinitum ut fiat eius terminatio X. satis patet ex prædictis C & G esse inter se æquales, & H maiorem esse quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H maior est quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H maior est media harmonica inter easdem; & quoniam M maior est quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H maior quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H maior erit quam F. eadem methode utramque seriem in infinitum continuando, semper demonstratur terminum quemlibet seriei AB, CD, minorem esse quam idem numero terminus seriei AB, GH; & igitur terminatio seriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio seriei AB, GH, nempe X; atque ex huius 9 terminatio seriei AB, GH, seu X, æqualis est minori duarum mediarum geometricè continue proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

Ex dictis manifestum est hanc approximationem exactiorem esse illa, in antecedenti propositione, demonstrata, etiam

si hæc

si hæc sit paulo laboriosior. sed non dissimulandum est duas posse esse series æquales terminationes habentes, ita ut semper quilibet terminus vnius seriei sit maior quam idem numero terminus alterius seriei; sed in talibus seriebus quo longius producuntur, eà minor est eorundem numero terminorum differentia: sed è contra nostræ series quò longius producuntur, eò magis differunt ijdem numero termini, sicut facillimè demonstrari potest.

Experientia obseruo differentiam inter secundam duarum mediarum arithmetice proportionalium & secundam duarum mediarum geometricè proportionalium semper esse multo maiorem differentia inter secundam duarum mediarum geometricè proportionalium & sectorem circuli, ellipsos vel hyperbolæ; quod notatu dignum existimo, hinc enim colligitur sectorem differre vix vltra vnitatem à secunda duarum mediarum arithmetice continuè proportionalium, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum vltra vnitatem, quod summoperè notandum, nam ex hoc euidentem est approximationem audacter esse adhibendam, quando ita continuatur series ut medietas prima notarum sit eadem in vtroque termino conuergente, quod experientia etiam euincit; nunquam enim in hoc casu differt sector vnitatem à secunda duarum mediarum arithmetice continuè proportionalium.

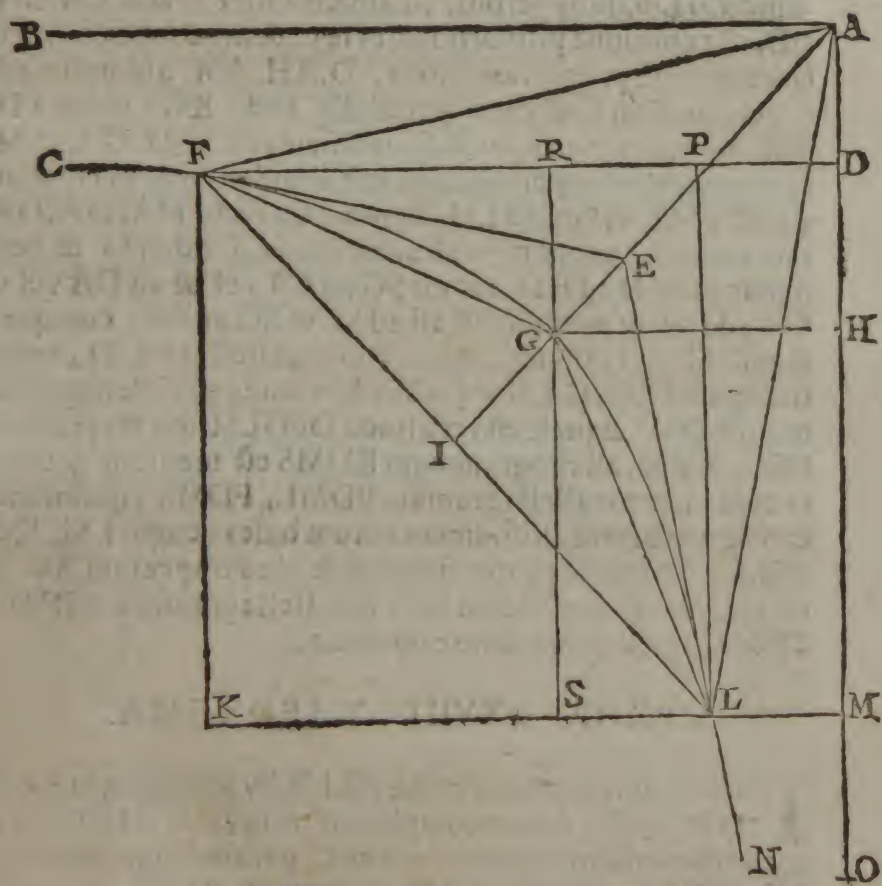
Est etiam alia approximatō omniū breuissima & maxime admiranda, etiam si mihi non contingat illam demonstratione geometrica munire; nempe si prima notarum triens in vtroque termino conuergente sit eadem, sector circuli, ellipsos vel hyperbolæ semper differt infra vnitatem à maximo quatuor arithmetice continuè proportionalium inter terminos nostræ approximationis.

PROP. XXVI. THEOREMA.

Sit hyperbola quæcunque CFN cuius centrum A, asymptota AB, AO; sitque eius sector AFGL cum triangu-

41

lo ci reumscripto AFL: asymptotorum vni AB parallelæ
 duca ntur rectæ FD, LM; & compleantur parallelogramma
 FDMK, PLMD. dico triangulum AFL esse medium arith-
 meticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Grego-
 rius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonstrat trian-
 gulum AFL esse æquale trapezio DFLM, sed manife-
 stum est trapezium DFLM esse medium arithmeticum inter
 parallelogramma FDMK, PLMD; & ideò patet propo-
 situm.



F

PROP.

PROP. XXVII. THEOREMA.

Iisdem positis: ducatur AI rectam FL bifariam diuidens in I & hyperbolam intersecans in puncto G , fiatque trapezium sectori circumscriptum $AFGL$, quod dico esse mediū geometricum inter parallelogramma $FDMK$, $PLMD$. ex demonstratis Gregorij à S. Vincētio euidens est trapezium $AFGL$ æquale esse rectilineo $DFGLM$. & quoniam AGI recta secat rectam FL bifariam in I , ex eiusdem Gregorij à S. Vincētio Lib. de hyperbola, manifestum est rectas LM , GH , FD , esse continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD , AH , AM . asymptoto A O per punctum G ducatur parallela recta RGS rectis FD , MK , occurrens in punctis R , S . quoniam rectæ FD , GH , LM , sunt continuè proportionales, erit diuidendo & permutando FR ad SL vt GH ad LM : & quoniam rectæ MA , HA , DA , sunt continuè proportionales, erit etiam diuidendo & permutando MH ad HD hoc est SG ad GR vt HA ad DA vel vt GH ad LM ; & proindè FR est ad SL vt SG ad GR , cumque anguli FRG , GSL , sint æquales ob parallellas FR , SL , erunt trianguia FRG , GLS , equalia; & proinde parallelogrammum $RDMS$ æquale est rectilineo $DFGLM$ seu trapezio $AFGL$; sed parallelogrammum $RDMS$ est medium geometricum inter parallellagramma $PDML$, $FDMK$, quoniam eandem habentia altitudinem eorum bases nempe LM , SM , KM , sunt continuè proportionales; & ideò trapezium $AFGL$ est medium geometricum inter parallellagramma $PDML$, $FDMK$, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXVIII. THEOREMA.

Iisdem positis ducantur rectæ FE , LE , hyperbolam tangentes in punctis F , L , vt compleatur trapezium $AFEL$, quod dico esse medium harmonicum inter parallelogramma $PDML$, $FDMK$. triangulum AFL , trapezium $AFGL$, & mediū har-

43

harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK, sunt
 continuè proportionalia, quoniam triangulum AFL est me-
 dium arithmeticum & trapezium AFGL medium geometri-
 cum inter eadē parallelogramma, vt patet ex huius 13; sed
 triangulum AFL, trapezium AFGL, & trapezium AFEL
 sunt continuè proportionalia ex huius 1; & proinde trapeziū
 AFEL est medium harmonicum inter parallelogramma
 PDML, FDMK, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXIX. PROBLEMA:

Dato circulo aequale inuenire quadratum.

Sit quadratū circulo circūscriptū 4000000000000000; erit
 ergo eidē inscriptū 2000000000000000, inter quæ quadra-
 ta sit medium geometricum 2828427124746190 octagonū
 nempe intra circulum: deinde inter octagonum intra circu-
 lum & quadratum extra sit medium harmonicum, quod leui
 labore inuenitur diuidendo duplum quadrati octagoni in-
 tra circulum seu duplum rectanguli à quadratis intra & ex-
 tra circulum per summam quadrati & octagoni intra; eritq;
 inuentum medium harmonicum, octagonum circumscriptū,
 nempe 3313708498984760. continuetur hæc serier conuer-
 gens polygonorum complicatorum donec prima medietas
 notarum sit eadem in vtroque termino conuergente, nimirū
 vsque ad polygona laterum 16384; inscriptum enim est 314-
 1592576586860 & circumscriptum 3141592692091258;
 non consideratur nota vltima, quoniam in diuisionibus &
 radicum extractionibus semper à vera quantitate paululum
 aberramus, quod vltimam notam imperfectam plerumque
 reddit. adhibeatur deinde approximatio in huius 20 & 21
 demonstrata, & inuenientur termini intra quos est vera cir-
 culi mēsurā, posito diametri quadrato 4000000000000000,
 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792
 eodem maior, & proinde non latet circuli mensura, quam
 inuenire oportuit. polygonorum seriem hic appono.

F 2

Intra

	Intra circulum	extra circulum
4	2000000000000000	4000000000000000
8	2828427124746190	3313708498984760
16	3061467458920718	3182597878074527
32	3121445152258051	3151724907429255
64	3136548490545938	3144118385245904
128	3140331156954752	3142223629942456
256	3141277250932772	3141750369168965
512	3141513801141299	3141632080703181
1024	3141572940367090	3141602510256808
2048	3141587725277158	3141595117749588
4096	3141591421543029	3141593269613390
8192	3141592345578073	3141592807595664
16384	3141592576586860	3141592692091258

Circulus intra sequentes terminos consistit

3141592653589789 3141592653589792

eodem omnino modo reperitur rectilineum equale cuicumque sectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inscripto & trapezio circumscripto.

PROP. XXX. PROBLBMA.

Ex dato sinu inuenire arcum.

SIt arcus circuli AE descriptus ex cetro B. huius arcus datur radius nempe AB & sinus nempe AD: oportet inuenire quam proportionem habet ipse arcus ad integram circuli circumferentiam. fit arcus chorda AE & eius semissis tangens AC vel CE. ex quadrato radij AB auferatur quadratum sinus AD & relinquetur quadratum sinus complementi BD, datur igitur BD; & ideo datur area trianguli rectanguli ABD; datur quoque area trianguli ABE nempe rectangulum sinus dati AD in semissem radij BE. deinde fiat vt summa triangulorum ABD, ABE, ad triangulum ABE ita duplum trianguli ABE ad trapezium ABEC, vt constat

ex

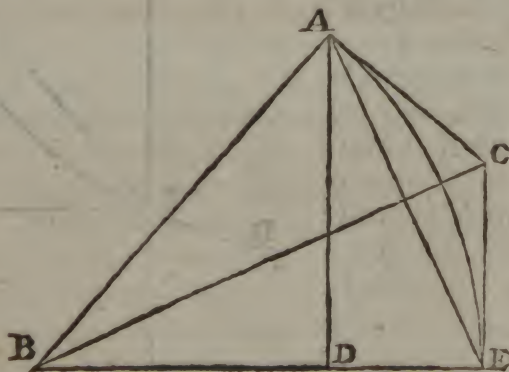
45

ex huius 5. & ex dato triangulo inscripto ABE & trapezio circumscripto ABEC, inueniatur per præcedentem sector ipse ABE, qui ad circulum integrum datum quesitam habet proportionem arcus AE ad totam circumferentiam, quam inuenire oportuit.

P R O P. XXXI P R O B L E M A

Ex dato arcu inuenire sinum,

EX dato arcu manifestum est dari sectoris aream; hoc igitur sectore dato consideretur ex quot notis arithmetice constet sinus totus: deinde sumatur sectoris dati talis pars aliquota nēpē sector ABE, vt triāguli inscripti ABE & trapezii circumscripti ABEC toties multiplicia, quoties sector datus multiplex est sectoris ABE, cōcordent in tot notis arithmetice quot cōtinet radix quadrata sinus totius; hoc enim facile fieri potest ex speculatione tabellę huius 29: nō enim requiritur in hoc praxis præcisa, nam nihil refert etiam si in magnis radijs discrepantia sit notarum aliquot. Sectoris cogniti ABE, cuius arcus AE etiam innotescit, datur radius BA: sic eius sinus AD, & proinde è dato sinu & radio, dabitur vt in antecedente triangulum sectori inscriptum ABE & eidem trapezium circumscriptum ABEC; atque ipse sector datus, est secunda duarum mediarum arithmetice continue proportionalium inter triangulū sibi inscriptum & trapezium circumscriptum; & proinde datur equatio inter duplū trapezii ABEC vna cū triangulo ABE & triplum sectoris cogniti ABE, cuius resolutio manifestat valorem quantitatis



ignotæ

nire mensuram spatii ILMK. Producantur rectę IK, OL, & ducatur recta IP, vt compleantur rectangula LNKM, QIKM; manifestum est rectangulum LNKM esse 900000000000-
000000000000 & QIKM 9000000000000000000000-
000 & trapezium LIKM esse medium arithmeticum inter
prædicta rectangula, hoc est 4950000000000000000000-
0000. inueniatur inter rectangula LNKM, QIKM, medium
geometricū 28460498941515413987990042 quod erit pen-
tagonū spatio hyperbolico LIKM regulariter circūscriptū.
Sicq; vt trapeziū LIKM vnā cum dicto pentagono circum-
scripto ad dictum pentagonum, itā duplum dicti pentagoni
ad hexagonū spatio hyperbolico LIKM regulariter inscrip-
tum, nempe 20779754131836628160009835; quod hexago-
num erit polygonum complicatum cum prædicto pentago-
no; quæ duo rectilinea efficiant primos seriei terminos con-
uergentes: inter quæ sit medium geometricum cuius qua-
drati duplum diuidatur per idem medium geometricū vnā
cum maiori termino seu pentagono circumscripto; eruntq;
medium geometricum & quotus, secundi termini conuergē-
tes: atque itā continuetur series hæc conuergens polygono-
rum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem
sit in vtroque termino conuergente, nempe ad terminū vi-
gesimū; polygonum enim circumscriptum est 230258509-
29958961534173864, & inscriptum 23025850929931203-
593181124: adhibeatur deinde adproximatio in huius 23 &
24 demonstrata, & inuenientur termini intra quos consistit
vera spatii hyperbolici LIKM mensura, nempe 230258509-
29940456240178681, minor spatio, & 230258509299404-
56240178704 eodem maior, & ideò non latet spatij mensu-
ra, quam inuenire opertuit: totam polygonorum seriem hic
appono vnā cum numero reftarum curuam hyperbolicam
subtendencium in vnoquoque polygono circumscripto.

Extra

Extra hyperbolam

2 28460498941515413987990042
 4 2431876169697147441669403
 8 23345088913234727934949897
 16 23105412906351426185065096
 32 23045725982658962868047234
 64 23030818728479610745741910
 128 23027092819292183214705676
 256 23026161398510805910921810
 512 23025928546847571901068394
 1024 23025870334152518169052273
 2048 23025855780992551911165543
 4096 23025852142703422669729927
 8192 23025851233131194254554390
 16384 23025851005738140519209367
 32768 23025850948889877295901163
 65536 23025850934677811503232115
 131072 23025850931124795055887228
 262144 23025850930230540944102405
 524288 23025850930014477416159412
 1048576 23025850929958961534173864
 hyperbolę sector intra sequentes terminos consistit
 23025850929940456240178681

Intra hyperbolam

20779754131836628160009835
 22410399968461612921314879
 22868197570682058351436953
 229861932244865462241217428
 23015921117139340153267671
 23023367512879047736902891
 23025230015404383009313933
 23025695697539046352276636
 23025812121604634087915779
 23025841227841783762272302
 23025848504414868310197241
 23025850323559001769499206
 23025850778345089029496888
 23025850892041614212944994
 23025850920465745719335070
 23025850927571778609090592
 23025850929348286832351848
 23025850929792413888218560
 23025850929903445652188450
 23025850929931203593181124
 hyperbolę sector intra sequentes terminos consistit
 23025850929940456240178704
 potest

Potest igitur absque periculo erroris sumi sequens numerus pro hyperbolæ sectore, cuius numeri multiplices usque ad decem, diuisionis facilitandæ gratia in compositione logarithmorum, hic subiicimus; in magnis namque diuisionibus præstat uti repetita diuisoris multiplicium subtractione quam ordinaria diuisione, ut constat expertis arithmeticis.

Manifestum est hoc problema eodem ferè modo posse resolui, etiamsi asymptota AO, AK, non sint constituta ad angulū rectum: nos autē ita supposuimus, ut facilius & paratior esset problematis usus in doctrina logarithmica, quam primò inuenit nobilissimus noster Neperus, & quam nos (ni fallor) ad summum perfectionis fastigium nunc eleuamus.

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

Propositi cuiuscunque numeri logarithmum inuenire.

Eisdem positis quæ in antecedente, manifestum est, posita IK unitate, ML esse decem: posita ergo IK unitate sit GH asymptoto quoque AO parallela numerus propositus cuius desideramus logarithmum. manifestum est ex data recta GH & IK, & ex præcedenti dari etiam spatium hyperbolicum GLKL, quod spatium hyperbolicum dico esse logarithmum numeri propositi GH, patet spatium hyperbolicum LLM. Alogarithmo nunc logarithmus est quoniam (a Gregorio a S. Vicentio) spatium GLKL in eadem mutatione ad spatium

G

LM

LMKL, in qua ratio GH ad IK est multiplicata rationis LM ad IK; sed ratio GH ad IK est multiplicata rationis LM ad IK in eadē ratione qua numerus GH est multiplicatus numeri LM, quoniam idem est consequens in vtraq; ratione; & proinde spatium GIKH est in eadē ratione ad spatium LIKM, in qua numerus GH est multiplicatus numeri LM; & ideo (quoniā ex hypothesi spatium LIKM est logarithmus numeri LM seu denarii) erit spatium GIKH logarithmus numeri propositi GH, quoniam hec est logarithmorum essentialis proprietas, vt sint inter se in eadem directa ratione, in qua eorum numeri sunt vnus alterius multiplicati: at ponitur communiter logarithmus numeri denarii ad arbitrium vnitas cum numero quodam cyphrarū: si igitur fiat, vt spatium LIKM ad spatium GIKH, ita arbitrarius denarii logarithmus ad alium numerum; erit inuentus ille numerus, logarithmus numeri propositi GH, quem inuenire oportuit.

SCHOLIUM.

PRaxis prædicti problematis prolixa est & laboriosa; & proinde vt abbreviatur labor noster in compositione tabulæ logarithmorum; sciendum est nos solūmodo laborare in inuentione logarithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compositorum logarithmi ex primorum additione & subductione nullo negotio inueniuntur. sed vt numerorum primorum logarithmi facilius inueniantur, ordine progrediendum est à prioribus ad posteriores, nempe à 10 cuius logarithmus est arbitrarius ad 2 numerū omnium primū, & a 10 & 2 ad 3, item a 10, 2 & 3 ad 7, item a 10, 2, 3 & 7 ad 11, & sic deinceps. deinde inueniendi sunt duo numeri compositi parum inter se differentes, quorum vnus compositus est ex numeris logarithmos cognitos habentibus, & ideo logarithmum datum habens, alter autem numerus compositus est ex solo numero primo (cuius queritur logarithmus) vel ex illo vnā cum aliis numeris logarithmos cognitos habentibus. deinde applicetur hi numeri compositi

positi (qui exempli gratia sint GH, EF) in hyperbola asymptoto OA parallelli; & inueniatur spatium hyperbolicum $EGHF$ per huius 32, quod breuiter, fit quoniam GH, EF , parum inter se differunt. ex suppositione, vnus numeri, exempli gratia GH , datur logorithmus, & proinde datur eius logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quae eadem est (ex haecenus demonstratis) cum ratione spatii hyperbolici $G I K H$ ad spatium hyperbolicum $L I K M$, datur autem ex huius 32 spatium $L I K M$; & ideo innotescit quoque spatium $I K H G$, cumque detur spatium $E G H F$, innotescit quoque $E I K F$; & proinde datur logorithmus numeri compositi EF ; cumque ex suppositione dentur logorithmi omnium numerorum numerum EF componentium, excepto numero illo primo cuius logorithmus desideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quae inuenire oportuit. Exempli gratia, propositum sit inuenire logorithmum numeri binarii, supposito arbitrario numeri denarii logorithmo, vnitate cum 25 cyphris. duo numeri compositi parum inter se differentes sunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum spatii 23025850929940456240178700 in antecedente inuenti, posito scilicet illo spatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, est enim compositus ex solo numero primo 2, nempe eius decies multiplicatus est. applicentur hi numeri compositi in hyperbola, ut dictum est, sitque GH 1000, EF 1024: sed quoniam IK vnitas est 1000000000000, erit GH 1000000000000000 & EF 1024 000000000000, & per huius 32 inueniatur spatium $EGHF$ 237165266173160421183067 (seriem conuergentem hic appono.

52

Extra hyperbolam

2 237170824512628449899917
 4 237166655750699903737556
 8 237165613567087322970403
 16 237165353021613523599438
 32 237165287885271907848389
 64 23716527160118881041012
 hyperbolę sector intra sequentes terminos consistit
 237165266173160272103220

Intra hyperbolam

237162487062045867846886
 237164571388054419219371
 237165092476425954356426
 237165222748948181485250
 237165255317105572320456
 237165263459146597159038
 237165266173160458453029

Sit inter hos terminos maximus quatuor continē arithmetice proportionalium 237165266173160421183067; qui proinde erit verus hyperbolę sector in notarum numero proposito, quoniam primus triens notarum idem est in vtroque termino convergente.

ut lectori cōpendiū patefiat) seu logorithmus numeri $1 \frac{53}{24} \frac{1000}{1000}$
 posito logorithmo denarij arbitrario 23025850929940456240178700; deinde eodem supposito logorithmo arbi-
 trario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, seu tri-
 plus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1 \frac{24}{1000}$, eritque

summa logorithmus numeri 1024, cuius pars decima erit lo-
 gorithmus numeri binarij, pro eodem logorithmo denarij
 arbitrario, nempe 6931471805599452914171917: fiatq; ut
 logorithmus numeri denarij 2302585092994045624017-
 8700 ad logorithmū numeri binarii corespondentē 693147-
 1805599452914171917, ita logorithmus numeri denarii ar-
 bitrarius propositus nempe 10000000000000000000000-
 000 ad logorithmum numeri binarii quēsitum 301029995-
 6639811952405804, quem inuenire oportuit: eodem modo
 inuenitur logorithmus ternarii 477121254719662437350
 2993, &c.

Ut in promptu habeantur numeri illi compositi parum in-
 ter se differentes pro vnoquoque numero primo, hic tabel-
 lam exhibeo pro numeris primis vsq; ad 100, & vnā regu-
 lam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro nu-
 meris primis supra 1000; quæ omnia ita excogitata sunt, ut
 verus cuiuscunque numeri primi logorithmus inueniri
 possit correspondens logorithmo arbitrario denarii 10000-
 0000000000000000000000 ex vna sola multiplicatione,
 duabus diuisionibus & vna radice quadratæ extractione,
 vltra inconsiderabiles aliquot operatiunculas.

- 2 1000 (3) 10
 1024 (10) 2
 3 328 (5) factus ex 5 & 6561 (3) 3
 32768 (15) 2
 2400 factus ex 3 & 32 (5) 2 & 25 (2) 5
 7 2401 (4) 7

- 54
 11 9800 factus ex 2, 49⁽²⁾ 7 & 100⁽²⁾ 10
 9801 factus ex 121⁽²⁾ 11 & 81⁽⁴⁾ 3
- 13 123200 factus ex 7, 11, 25⁽²⁾ 5, 64⁽⁶⁾ 2
 123201 factus ex 169⁽²⁾ 13 & 729⁽⁶⁾ 3
- 17 2600 factus ex 13, 8⁽³⁾ 2 & 25⁽²⁾ 5
 2601 factus ex 9⁽²⁾ 3 & 289⁽²⁾ 17
- 19 28899 factus ex 169⁽²⁾ 13, 9⁽²⁾ 3 & 19
 28900 factus ex 100⁽²⁾ 10 & 289⁽²⁾ 17
- 23 25920 factus ex 10, 32⁽⁵⁾ 2 & 81⁽⁴⁾ 3
 25921 factus ex 49⁽²⁾ 7 & 529⁽²⁾ 23
- 29 613088 factus ex 17, 23, 32⁽⁵⁾ 2, & 49⁽²⁾ 7
 613089 factus ex 729⁽⁶⁾ 3 & 841⁽²⁾ 29
- 31 116280 factus ex 10, 17, 19, 4⁽²⁾ 2, & 9⁽²⁾ 3
 116281 factus ex 121⁽²⁾ 11 & 961⁽²⁾ 31
- 37 165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16⁽⁴⁾ 2
 165649 factus ex 121⁽²⁾ 11 & 1369⁽²⁾ 37
- 41 1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4⁽²⁾ 2 & 27⁽³⁾ 3
 1413721 factus ex 1681⁽²⁾ 41 & 841⁽²⁾ 29
- 43 978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4⁽²⁾ 2, 9⁽²⁾ 3
 978121 factus ex 529⁽²⁾ 23 & 1849⁽²⁾ 43
- 47 664848 factus ex 7, 13, 32⁽⁵⁾ 2 & 729⁽⁶⁾ 3
 664849 factus ex 961⁽²⁾ 31 & 2209⁽²⁾ 47
- 53 3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, 3⁽³⁾ 2, & 125⁽³⁾ 5
 3059001 factus ex 9⁽²⁾ 3, 121⁽²⁾ 11 & 2809⁽²⁾ 53
- 57 5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121⁽²⁾ 11
 5851561 factus ex 1681⁽²⁾ 41 & 3481⁽²⁾ 59

- 61 3575880 factus ex 5, 7, 11, 43, 8 (3) 2 & 27 (3) 3
 3575881 factus ex 961 (2) 31 & 3721 (2) 61
- 67 1620528 factus ex 3, 13, 16 (4) 2 & 49 (2) 7
 1620529 factus ex 361 (2) 19 & 4489 (2) 67
- 71 2016399 factus ex 3, 11, 29, 43 & 49 (2) 7
 2016400 factus ex 16 (4) 2, 25 (2) 5 & 5041 (2) 71
- 73 5116644 factus ex 4 (2) 2, 9 (2) 3, 169 (2) 13, & 841 (2) 29
 5116643 factus ex 7, 17, 19, 31, 73
- 79 5997600 factus ex 17, 32 (5) 2, 9 (2) 3, 25 (2) 5 & 49 (2) 7
 5997601 factus ex 961 (2) 31 & 6241 (2) 79
- 83 1164240 factus ex 5, 11, 49 (2) 7, 16 (4) 2, 27 (3) 3
 1164241 factus ex 169 (2) 13 & 6889 (2) 83
- 89 2859480 factus ex 5, 47, 8 (3) 2, 169 (2) 13 & 9 (2) 3
 2859481 factus ex 361 (2) 19 & 7921 (2) 89
- 79 1138488 factus ex 3, 13, 41, 89, & 8 (3) 2
 1138489 factus ex 121 (2) 11 & 9409 (2) 97

Pro numeris primis inter 100 & 1000 sit hæc regula: ante numerum primum cuius logarithmus queritur, sumantur immediatè duo numeri proximi, & post eum numerus immediatè sequens, qui tres numeri cum illo primo sunt quatuor numeri in suo naturali ordine se inuicem sequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertij & quartus in cubum secundi, eritque factorum differentia æqualis summae primi & quarti vel secundi & tertij, vt facile demonstrari potest; isti que numeri facti habent ad minimum sex notas primas omnino easdem, & proinde parum inter se differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertij) logarithmi cognoscuntur ex ipsa progrediendi methodo, & ideò ad nostram abbreviationem sunt idonei, in numeris ultra 1000 non opus est tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorù, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cuius queritur logarithmus,

vnitate

vnitate solummodo deficit à quadrato numeri primi; eorūque ideo prime sex notæ ad minimum sunt eadem; atque primi & tertii dantur logarithmi, & ideo ad nostrum institutum sunt idonei.

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Ex dato logarithmo inuenire eius numerum.

EX demonstratis manifestum est hoc problema idem esse ac si quis proponeret; ex dato spatio hyperbolico, & vna recta vni asymptotorum parallela illud comprehendente, alteram inuenire idem spatium comprehendentem, & eidem asymptoto parallelam. consideretur ex quot notis arithmetice constet logarithmus denarij arbitrarij; & sumatur logarithmi vel spatij dati talis pars aliquota nempe spatium LIKM, vt pentagoni spatio LIKM regulariter circumscripti, & hexagoni eidem regulariter inscripti toties multiplicia, quoties spatium datum multiplex est spatij LIKM, concordent in tot notis arithmetice, quot continet radix quadrata logarithmi arbitrarij; hoc enim facile fieri potest ex inspectione tabellæ 32 huius: datur ergo spatij LIKM mensura & recta IK vnitas ex suppositione. sit LM, z; sicut in huius 32 datur pentagonum spatio LIKM regulariter circumscriptum & hexagonum eidem regulariter inscriptum, inter quæ spatium datum LIKM est secunda duarum mediarum arithmetice continuè proportionalium; & ideo duplū hexagoni vna cum pentagono æquatur triplo spatij, cuius æquationis resolutio manifestat ignotam z seu numerum LM, cuius toties multiplicatus, quoties spatium LIKM est submultiplex ij, trij vel logarithmi dati, est numerus quæsitus, quem inuenire oportuit.

Hoc problema idem est cum huius 8, sed aliter generalius & methodo plerumque minus operosa hic resolutum.

PROP.

S C H O L I U M.

SI quis prædictorum problematum mechanicam desideret praxem; non difficile erit calculum, approximationē, & æquationis resolutionē secundū vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodāmodo imitare. multa talia problemata possem hic resolvere ope analysis & nostræ serierum conuergentium doctrinæ, quæ antea impossibilia æstimabantur; sed dicet fortè aliquis has resolutiones non esse geometricas; respondeo, si per geometricum intelligatur praxis ope solius regulæ & circini peracta, hanc in his non solum esse impossibilem sed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non possunt, sicut facile demonstrari posset; & si per geometricum intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam, omnia hæc problemata sunt geometricè impossibilia, cum ex hic demonstratis, manifestum sit talem reductionem fieri non posse; si verò per geometricum intelligatur methodus omnium possibilium simplicissima; inuenietur fortasse post maturam considerationem omnia prædicta problemata esse geometricissimè resoluta. diligenter animaduertendum totam serierum conuergentium doctrinam posse etiam nullo negotio applicari seriebus simplicibus. sit enim series A, B, C, D, E, &c, talis naturæ vt tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & secundo A, B, quo quartus D componitur ex secundo & tertio B, C, & quintus E ex tertio & quarto C, D, & sic deinceps in infinitum; sitque differentia antecedentium A, B, maior semper differentia immediatè sequentiū B, C; supponamus hanc seriem ita in infinitum continuari donec duorū terminorū immediate se inuicè sequentium nulla sit differentia, sitque vnus ex illis terminis z , quem seriei terminatio-

A
B
C
D
E
 z

nem

nem appellamus: diēo & eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonstratio vix differt ab huius 10 & eius confectario: hac ratione si ponatur triangulum, sectori circulari vel elliptico inscriptum, vel sectori hyperbolico circumscriptum a , & trapezium, sectori circulari vel elliptico regulariter inscriptum vel hyperbolico regulariter circumscriptum b ; erit hexagonū sectori circulari vel elliptico regulariter inscriptum vel hyperbolico regulariter

circumscriptum $\sqrt{g \frac{2b_3}{a+b}}$; & proinde sector circuli, ellipseos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex a & b quo ex b

& $\sqrt{g \frac{2b_3}{a+b}}$; atque hinc etiam demonstrari potest, quod ratio inter sectorem & eius triangulum datum non sit analytica, secundum tenorem huius 11: possem quoque adhuc alia methodo particulari demonstrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad suam chordam datam: sed plura non addo, geometras interim pro scientiæ incremento admonens, me reperisse in quibusdam figuris (quas Cartesius secundi generis appellat) tres focos, seu tria puncta, à quibus ductarū in quodlibet curvæ punctum rectarum summa vel differentia semper est eadem: vnde mihi verisimile videtur sicut omnis curvæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes secundi generis habere tres, omnes tertiū quatuor, & sic in infinitum: quæ certè speculatio scrutata dignissima est, esset enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi utilisissima.

FINIS.

Anno Dom: 1667.

POSTSCRIPTVM.

Proposui tria problemata R. P. Francisco Eschinardo & S. Iesù (dum inter nos ageretur de quiquiliis quibusdam opticis) promissique, illo & aliis silentibus, geometricam eorum omnium solutionem exhibere, dummodo a Mathematico per literas a me requireretur; ille autem absq; vilo responso familiaribus suis matheseos ignaris passim significauit (sicut ego ab amicis meis intellexi) mea problemata esse trita, vulgaria, ab Archimede & Lalouera soluta, neque responsione digna: & proinde ego eadem problemata hic euulgo, Mathematicorum iudicia implorans num hæc problemata a quouis vnquam vilo modo sint soluta, vel si ita inutilia & facilia sint vt mathematici contemplatione estimari possint indigna: sunt autem sequenti a.

IN OPTICIS.

Lentem vitri sphericam data crassitiei efficere cuius ope oculus, visus distantiam habens cognitam, percipiat visibile in distantia data a lente remotum quantumlibet auctum cum distincta visione; assignata etiam oculi a lente distantia,

IN GEOMETRICIS.

Curue parabolicae vel eius portionis data centrum gravitatis inuenire, supposita circuli & hyperbole quadratura.

IN ASTRONOMICIS.

Corporis cuiuscunque celestis parallaxes quotcunque inuenire, supposito corpus celeste moueri in sectione conica siue circa terram siue circa solem.

Mirror

61

Miror certe R. virum ita loquutū esse; Archimedes enī
 & Lalovera nihil vnquam scripserunt (salte quod ad ævum
 nostrum peruenit) nec in optica nec in astronomia; oportet
 ergo vt loquatur de problemate geometrico; at Guldinus
 Iesuita & ordinis etiam princeps geometra non sine ratione
 gloriatur, pag. 23 sue centrobaricæ tomo primo anno 1635
 edito, se esse omnium primum, qui vnquam aliquid demō-
 strauit de centrīs grauitatis linearum; ingenue tamen fate-
 tur, tom: primo centrob: pag. 65, se nihil potuisse proficere
 vltra centra grauitatis linearum rectarum & circularium:
 nihilominus prædictus R.P. affirmat centrum grauitatis cur-
 uæ parabolicæ inuentum esse ab Archimede viginti quasi se-
 culis ante nostra hæc tempora: sed non opus est de re mani-
 festa plura dicere; satis enim percipio R. virū in eo lapsū
 esse, quod (in philosophiæ, quam matheseos, studiis porius
 versatus) crediderit lineam curuam parabolicam, de qua
 loquimur nos, esse superficiem planam parabolicam, de qua
 scribunt Archimedes & Lalouera.

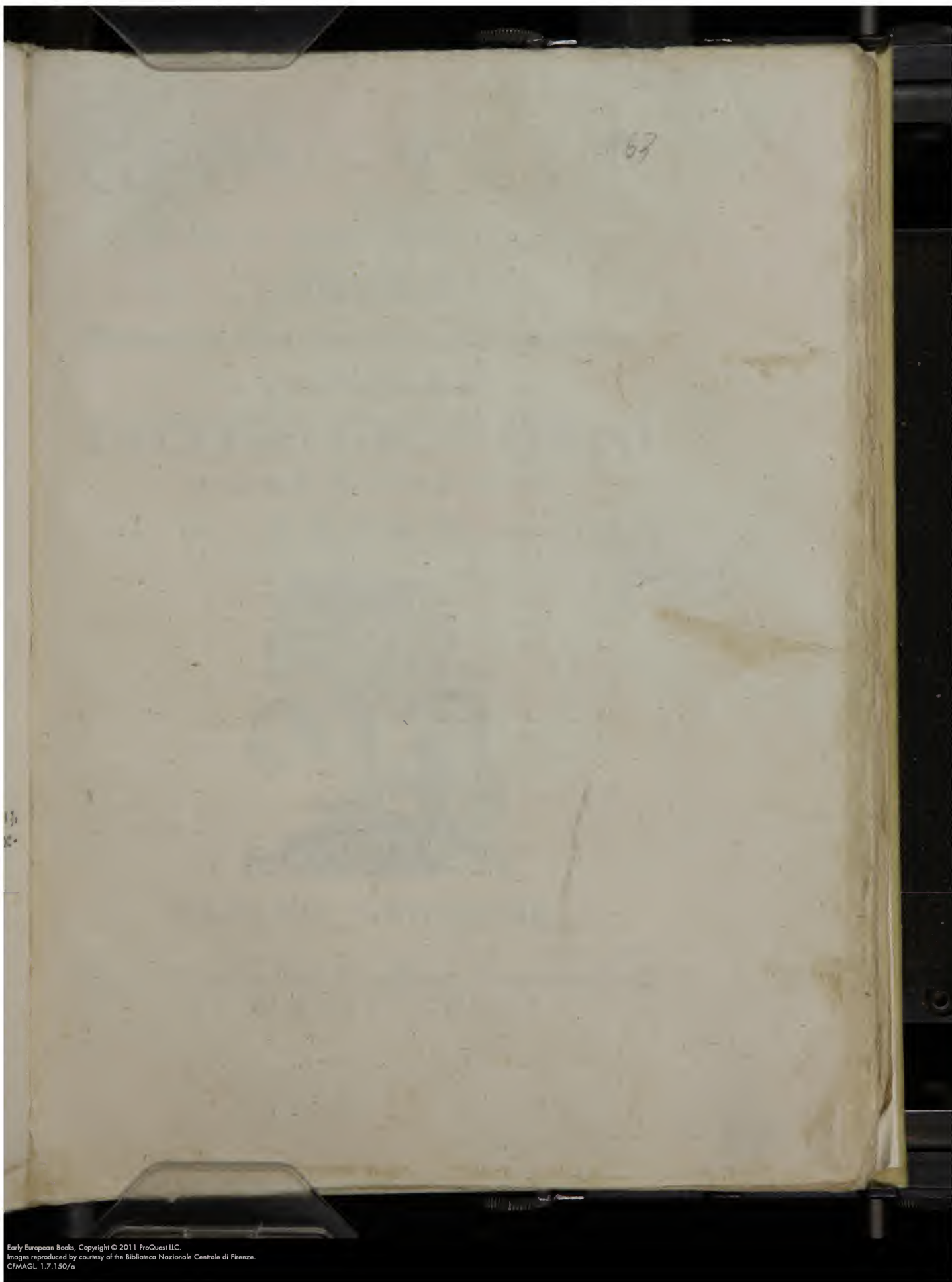


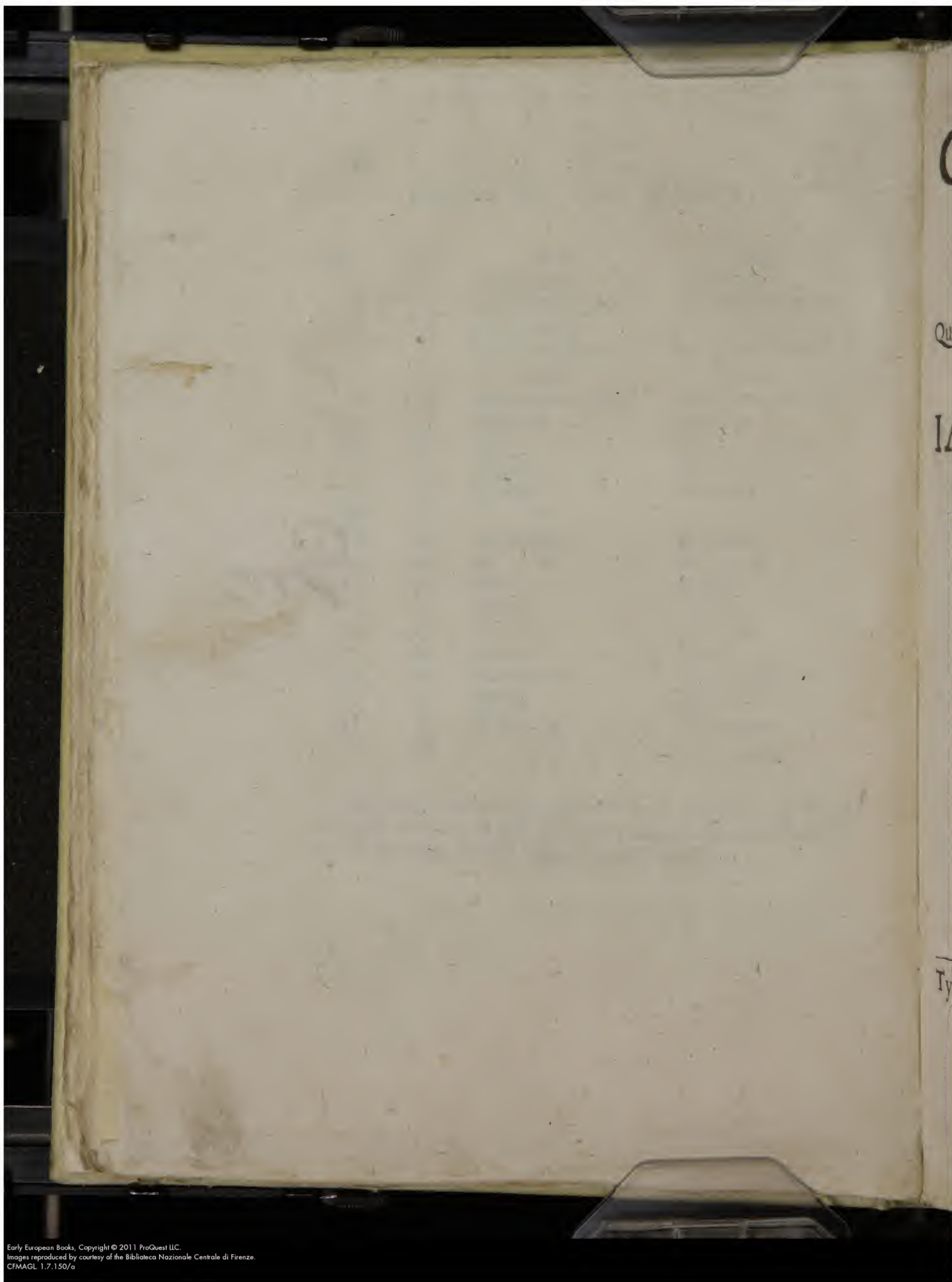
Errata

Errata sic Corriguntur.

Pag.	Lin.	Pro	Lege
4	1	constitum	constitui
4	14	impossibilitatem	impossibilitatem
6	9	strinonium	trinonium
7	23	hestrogeniorum lentes	heterogeniorum lensis
7	24	homogeneietatem	homogeneitatem
12	5	trapezia	trapezia
16	10	ad B	ad C
17	10	excesus	excessus
17	14	inscripi	inscripti
18	4	a	a
18	24	deminutio	diminutio
19	16	in &	in a &
24	21	reriei	seriei
24	32	omnes	omnis
30	20	C, D, F,	C, D, E
35	33	eadem	eodem
39	vlt:	exactionem	exaetionem
40	27	prima	primus
45	2	lectionum	lectionum
55	15	79	97

Figura are incisa inferenda est intra paginam 12 & 13, si modo lector illam inferere velit: commodius tamen tenetur soluta, ut diuersis propositionibus inferuiat.





64
GEOMETRIÆ

PARS VNIVERSALIS,

Inseruiens

Quantitatum Curvarum transmutationi & mensuræ.

AVTHORE

IACOBO GREGORIO

ABREDONENSI

SCOTO.

Gre



PATAVII, MDCLXVIII.

Typis Heredum Pauli Frambotti, *Superiorum Perm.*
CVM PRIVILEGIO.

GEOMETRIAE

PARS UNIVERSALIS

Introduction

De ratione et methodo huius scientiae

LIBER PRIMUS

DE GEOMETRIA

DEFINITIONES

PROPOSITIONES

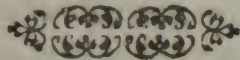


LIBER SECUNDUS

DE GEOMETRIA



PROŒMIVM



65

Œſervatum eſt à noſtri ſeculi geometris mathematicam ab antiquis malè fuiſſe diuiſam in geometriam, arithmeticam, &c, ſed potius in uniuersalem & particularem: Matheſeos pars uniuersalis tractat de proportionem in communi abſtrahendo ab omni quantitatis ſpecie, quæ communiter (etiã ſi fortassis abuſiue) geometria appellatur, cui affinis eſt recentiorum analytica: matheſeos pars particularis diuiditur; in geometriam propriè ſic dictam, quæ nihil aliud eſt niſi matheſeos pars uniuersalis figuræ reſtrieta; in arithmeticam, quæ eadem eſt matheſis uniuersalis numero, et ſtaticam, quæ eadem eſt motui reſtrieta, &c. ego (ni fallor) idem video in geometria: cum enim obſervarem generaliſſimos analyſeos canones omni problemati inferre, dummodo poſſibile ſit illos applicare, & analyſem nihil aliud eſſe niſi examinationem quantitatum ignotarum, donec tandem reducantur ad æquationes cum quantitibus cognitis; cogitabam analyſeos defectum (quæ præcipuè apparet in menſuratione

† 2 quan.

quantitatum curvarum) posse aliquatenus suppleri; si moda
e data cuiuscunque figuræ proprietate essentiali, daretur me-
thodus eam transmutandi in aliam æqualem cognitæ proprie-
tates habentem, & huius in aliam, & sic deinceps, donec
tandem transmutatio fiat in aliquam quantitatem cognitam;
sic enim exhiberetur quantitatis propositæ mensura quæsita,
non secus quam in æquationis analyticæ resolutione. neque
existimo meam opinionem esse frustratam, puto enim hunc tra-
ctatulum continere geometriæ partem adeo uniuersalem, ut
nullam respuat particularem figuram eorum generum, quæ a
geometris adhuc contemplata sunt; quod si alia figurarum ge-
nera contemplanda sibi proponant, promouenda est hæc scien-
tia; sicut enim figurarum genera sunt infinita, etiam hæc geo-
metriæ pars, sicut omnis alia, infinita erit; nihilominus mul-
to breuius & elegantius erit uniuersalem doctrinam unicui-
que particulari casui secundum figuræ proprietates applicare,
quam de unaquaque figura integrum uolumen euulgare.
Huius methodi studiosus ante omnia versatus esse debet in
analyse, nam absque illa, cuiusvis ingenii vires superat,
propositæ cuiuscunque figuræ proprietates examinare.

Non diffiteor me legisse apud præstantes geometras multa
talis methodi vestigia, sed plerumque vel particulariter vel
parum geometricè demonstrata; quæ mea sunt & quæ aliena,
iudicet lector, qui hunc tractatulum cum aliorum compara-
uerit, ego enim nihil affirmo, ne videar ea mihi adscribere
quæ ab alijs (me etiam inscio) antea reperta sunt. Demon-
strandi methodo utor (ni fallor) mihi peculiari, quippe multo
bre-

66

breuiore quam Archimedeā & non minus geometrica; utor quoque in propositionibus magis obuiis methodo Caualleriana, quæ etiam nullo negotio reducitur ad Archimedeam vel nostram. Quod si geometra, post diligentem huius methodi applicationem secundum figuræ proprietates, nullum inueniat problematis exitum; recurrendum est ad seriem conuergentem, cuius terminatio sit ipsa figura incognita vel alia ad eam in ratione data; ob hanc enim rationem, conatus sum aliarum figurarum proportionem reducere ad proportionem inter figuras planas, in his enim existimo faciliorem esse serierum conuergentium doctrinam: non tamen audeo affirmare seriem conuergentem semper posse inueniri; suspicor enim hanc methodum esse insufficientem ad omnes proportionem non analyticas inueniendas: utcunque nostrum tractatulum de vera circuli & hyperbolæ quadratura volumus esse ultimum nostræ methodi refugium, nam serierum conuergentium doctrina est generalis, quæ e figuræ proprietatibus semel inuenta solutionem possibilem exhibebit; & proinde obiectionibus contra nostram doctrinam hic satisfaciamus.

Primo obiicitur contra titulum, nempe tractatum meum male appellari veram circuli & hyperbolæ quadraturā, cum potius sit conatus demonstrandi illam esse impossibilem; respondeo, si esset impossibilis, nulla daretur proportio inter circulum & diametri quadratum, & ideo falsa esset 5 definitio lib. 5. Euclidis; si autem sit possibilis, monstrandus est nostræ error, si nostra vera non sit. Alii sic obiiciunt: hæc quadratura nulla est, quoniam non assignatur proportio inter cir-

t 3 culum

culum & diametri quadratum; huic obiectioni respondeo,
posito circuli diametro b , erit ipse circulus terminatio seriei
conuergentis, cuius primi termini sunt $\frac{b^2}{2}$, b^2 , & secundi

$$\sqrt{q} \frac{b^4}{2}, \frac{2b^4}{b^2 + \sqrt{q} 2b^4}, \text{ \& proinde quadratum diametri est ad}$$

circulum ut b^2 ad prædictam terminationem, quæ terminatio
nobis nullo modo est magis incognita quam radix surdesolida
numeri 40. dicunt alii non bene esse demonstratum (in scholio
prop. 5) sectorem $ABIP$ eundem esse cum terminatione seriei
conuergentis, cuius primi termini sunt triangulum ABP &
trapezium $ABFP$, & secundi, rectilinea $ABIP$, $AB \cap LP$:
& proinde plenam demonstrationem hic subiicio: si sector &
prædicta terminatio non sunt æquales, sit inter illas differen-
tia Z ; & producaturs series conuergens donec terminorum
conuergentium (nempe P & Q) differentia sit minor quam
 Z , euident enim est (ex prop. 6.) hoc fieri posse; hisce positis,
patet tam sectorem quam seriei terminationem consistere inter
terminos P & Q ; & proinde quatuor sunt quantitates,
quarum maxima & minima sunt P & Q , intermediæ au-
tem sector & terminatio seriei, eritque differentia intermedia-
rum nempe Z maior quam differentia extremarum, quod
est absurdum, nulla ergo est differentia inter sectorem & seriei
terminationem, & proinde æquales sunt, quod demonstnan-
dum erat. Alii obiciunt contra prop. 11. ita; si addatur
 a^3 termino $a^3 + a^2b$ & termino $ba^2 + b^2a$, eneruetur vis
utriusque demonstrationis; respondeo a^3 esse quantitatem in-
defi-

62
definitam & alias quantitates indefinitas præter ipsos terminos convergentes compositionem non posse ingredi, quod analytici latere non potest. Obiiciunt alii: hac eadem methodo potest demonstrari inter duas quantitates indefinitè commensurabiles P, Q , non posse inveniri mediam proportionalem illis commensurabilem, quod tamen est falsum si P, Q , sint planosimiles; respondeo maximam esse discrepantiam inter radicem extractionem & sextam illam operationem, nam in radicem extractione, cum divisor diuidendum metitur, quod in prædicto casu evenit, radicis extractio coincidit cum quatuor operationibus prioribus, sexta autem operatio, cum ex natura sua sit infinita, cum prioribus nunquam coincidit. Obiicit quidam non vulgaris geometra circuli quadraturam ope quadraticis peractam esse operationibus analyticis; quod omnino nego desiderando ab affirmante, ut illas operationes analyticas assignet, ego enim existimo basem quadraticis non esse magis assignabilem ab operationibus analyticis, quam radicem quadratam binarij à primis quatuor operationibus arithmeticis.

Solutis obiectionibus quæ contra nostram doctrinam vel ab aliis afferuntur vel a me imaginari possunt, satisfaciamus etiam illis, qui operationibus organicis delectantur. Si quis velit organicè circulum quadrare vel angulum in ratione data diuidere; non existimo ullum modum esse simpliciorum quam vulgaris linea quadratrix in materia aliqua solida & plana accurate & punctatim descripta. Quod ad quadraturam hyperbolæ attinet, existimo satis facile esse trianguli,

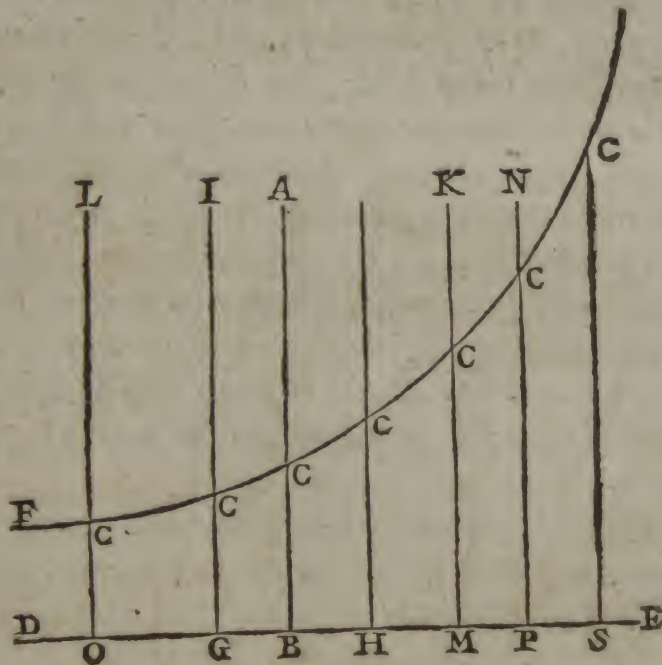
guli, seu trapezij inscripti (sunt enim inter se æqualia) ad triangulum circumscriptum rationem in rectis exhibere, & ab illis rectis seriem debitam conuergentem continuare, donec conueniens fuerit approximationem adhibere. Omnia quæ desiderari possunt de logarithmis & rationum compositione operæ sequentis curvæ nullo negotio inueniri possunt.

Sit linea recta DE , sitque alia recta illi normaliter insistens AB , in qua sit punctum mobile C , quod punctum C moueatur ea ratione, ut, dum perpendicularis mouetur versus E uel D normaliter semper insistens rectæ ED , interceptæ inter punctum C & rectam DE sint ad ipsam CB in rationibus inter se multiplicatis in ratione motus rectæ perpendicularis AB : e.g. moueatur AB in KM & NP ; oportet ut punctum C moueatur ea lege, ut ratio CP ad CB sit multiplicata rationis CM ad CB in ratione PB ad MB : eodem modo ad partes D , supposito AB moueri in IG & LO , ut punctum C ea lege moueatur, ut ratio CO ad CB sit multiplicata rationis CG ad CB in ratione OB ad GB : atque è recta DE & duobus punctis curvæ quæsitæ a motu puncti C descriptæ aalibitum datis, facile est curuam ipsam punctatim describere, e.g. supposito curuam in rectis AB , KM , transire per punctum C , oportet alia huius curvæ puncta inuenire: diuidatur BM bifariam H , sitque perpendicularis HC media proportionalis inter BC , MC ; dico C esse unum ex punctis quæsitis, est enim ratio CM ad CB duplicata rationis CH ad CB , & recta MB est dupla rectæ BH , est igitur C in curua quæsitæ. Deinde sit recta SM æqualis rectæ MB , &

ut

68

ut CB ad CM ita CM ad perpendicularem CS, ut prius de-
monstratur C esse punctum curvæ quæsitæ, atque hac ratio-
ne possunt inueniri puncta quotlibet, & curua quantumlibet
produci. Notandæ sunt quedam huius curvæ proprietates exi-

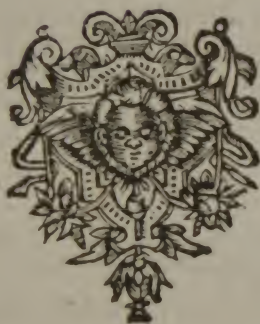


miæ, quæ nullo negotio deprehenduntur; prima est, quod ex
utraque parte possit produci in infinitum; secunda, quod
ex una parte nempe F, licet rectam ED semper magis ap-
propinquet, nunquam tamen cum illa concurrat, efficiens spa-
tium ex parte FD finitum in quantitate etiam si infinitum in
lon-

longitudine; tertia; quod, posita una perpendicularium seu ordinatim applicatarum loco unitatis, & reliquis loco numerorum, intercepta recta in DE seu curva asymptota inter unitatem & numerum semper sit logarithmus numeri; e.g. posita CO unitate & CG binario, item CB ternario, CH quaternario, &c; erit OG logarithmus binarii, OB ternarij, OH quaternarij, &c. Si describatur hæc curva exactè in plano solido, non solum eius ope cum regula & circino inuenientur inter datas duas rectas quocunque mediæ proportionales, sed omnia problemata imaginabilia de rationum compositione etiam facile perfici possunt; sed hæc, quoniam facilia sunt, consultò omitto, lectorem interim admonens spatium, contentum à portione prædictæ curvæ, sua asymptota & duabus ordinatim applicatis, non habere rationem analyticam ad rectangulum illi inscriptum, sicut demonstrari posset secundum tenorem prop. II. prædicti tractatuli.

Hæ operationes non existimari debent æ geometricæ, quoniam sola ope regulæ & circini non perficiuntur, sicut optime obseruat subtilissimus Mathematicus D. Carolus Renaldinius in geometra suo promoto, dum tractat de nouis illis lineis, quas Mediceas appellat; quod ut clarius fiat, hic conabor ostendere nullam vel æquationem cubicam posse resolui ope solius regulæ & circini: omnis æquatio cubica habet vel unam solam vel tres radices reales, quæ si inuenirentur ope solius regulæ & circini, seu intersectione circuli & lineæ rectæ, linea recta circulum secaret vel in uno solo

64
solo puncto vel in tribus, quod utrumque est absurdissimum:
ob similem etiam rationem, æquatio cubica tres habens radi-
ces reales nunquam potest reduci ad puram, quæ unicam tan-
tum habet: nam in his æquationis reductio nullo modo
proficiet, cum impossibile sit eius ope radicem imaginariam
in realem mutare vel è contra.



METHO.

906

METHODVSⁱ VNIVERSALIS

Transmutandi, & mensurandi quantitates curvas.



PROP. I. THEOREMA.

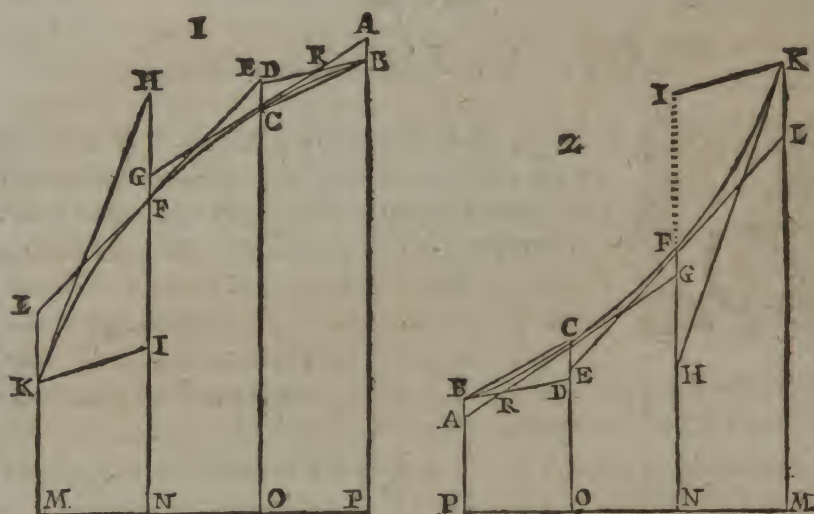
Sit curva quæcunque KB simplex & non sinuosa, hoc est à K ad B, rectam quandam positione datam MP semper appropinquas, vel semper ab illa recedens. Sic (in prima figura) punctum in curva KB rectæ MP maxime propinquum, K. ex duobus quibuscunque punctis curvæ KB, nempe C, B, demittantur perpendicularis CO, BP, in rectam MP, & à puncto curvæ C, utpote puncto K proximior ducatur recta CA curvam tangens in C, & PB productæ occurrens in A. dico rectam CA maiorem esse curva CB. curvam tangens in B, & rectæ CA occurrens in R, & OC productæ in D, ducatur recta BRD. quoniam in progressu a K ad B, curva KB semper magis elongatur a recta PM, igitur recta BD curvam tangens in puncto B, & vergens versus K e contra tendit ad concursum cum recta PM, & ideo angulus ABR est obtusus, superans nempe rectum MPB illo angulo, in quo cum PM producta concurrat, est igitur angulus ABR major angulo RAB, & latus AR maius latere BR, & commune addendo, recta AC maior est rectis BR, RC. sed BR, RC, curvam tangentes in punctis B, C, sunt maiores arcu BC, & ideo AC recta eodem arcu CB est multo maior, quod demonstrare oportuit.

A

Se

2

Secundo dico BD rectam minorem esse curva BC. ex ha-
tenus demonstratis, angulus ABD est obtusus; & proin-
de etiam, ob parallellas AP, DO, illi æqualis CDB; & ideo
ducto subtendente CB, angulus BDC maior est angulo
BCD, & recta DB minor recta BC, sed recta BC minor est
curva BC, & ideo recta BD multo minor est curva BC. ex



punctis extremis K, B, in rectam MP demittantur perpendi-
culares KM, BP; deinde diuidatur recta MP in partes quot-
cunque æquales MN, NO, OP, & à punctis P, O, N, M, eri-
gantur perpendiculares PA, OE, NH, ML, curvam secantes
in punctis B, C, F, K, in quibus singulis ducantur rectæ cur-
vam tangentes versus B a perpendicularibus proximis termi-
natæ, nempe KH, FE, CA, & in puncto B sit tangens BD a
perpendiculari proxima versus K terminata in D, sitque re-
ctæ BD parallella KI: manifestum est KH maiorem esse recta
KI ob angulum HIK obtusum æqualem angulo ABD.

Dico omnes rectas KH, FE, CA, simul maiores esse curva
KB

KB & excessum rectæ HK supra rectam KI maior em esse excessu omnium rectarum KH, FE, CA , simul supra curvam KB . producantur tangentes AC, EF , ad proximas perpendiculares versus K in G & L . ex primo proposito, AC est maior curva BC , EF maior curva FC , & HK maior curva KF ; & ideo omnes simul KH, FE, CA , sunt maiores integra curva KB ; deinde ex secundo proposito BD , hoc est, KI minor est curva BC ; & CG , hoc est, CA minor est arcu FC ; & LF , hoc est, FE minor est arcu KF ; & ideo omnes KI, FE, CA , simul sunt minores integra curva KB ; & ideo maior est excessus rectarum KH, FE, CA , supra rectas KI, FE, CA , quam supra curvam KB ; sed rectæ FE, CA , sunt communes utrique rectarum summæ; & ideo excessus rectæ KH supra rectam KI est æqualis excessui summæ rectarum KH, FE, CA , supra summam rectarum KI, FE, CA ; qui demonstratus est maior excessu rectarum KH, FE, CA , supra curvam KB , quod demonstrandum erat. Si vera curva fuerit convexa ad rectam MP , ut in secunda figura, K debet esse punctum curvæ a recta MP maxime remotum, & aliquot demonstrationū verba sunt mutanda, sicut per se intelliget industrius Lector.

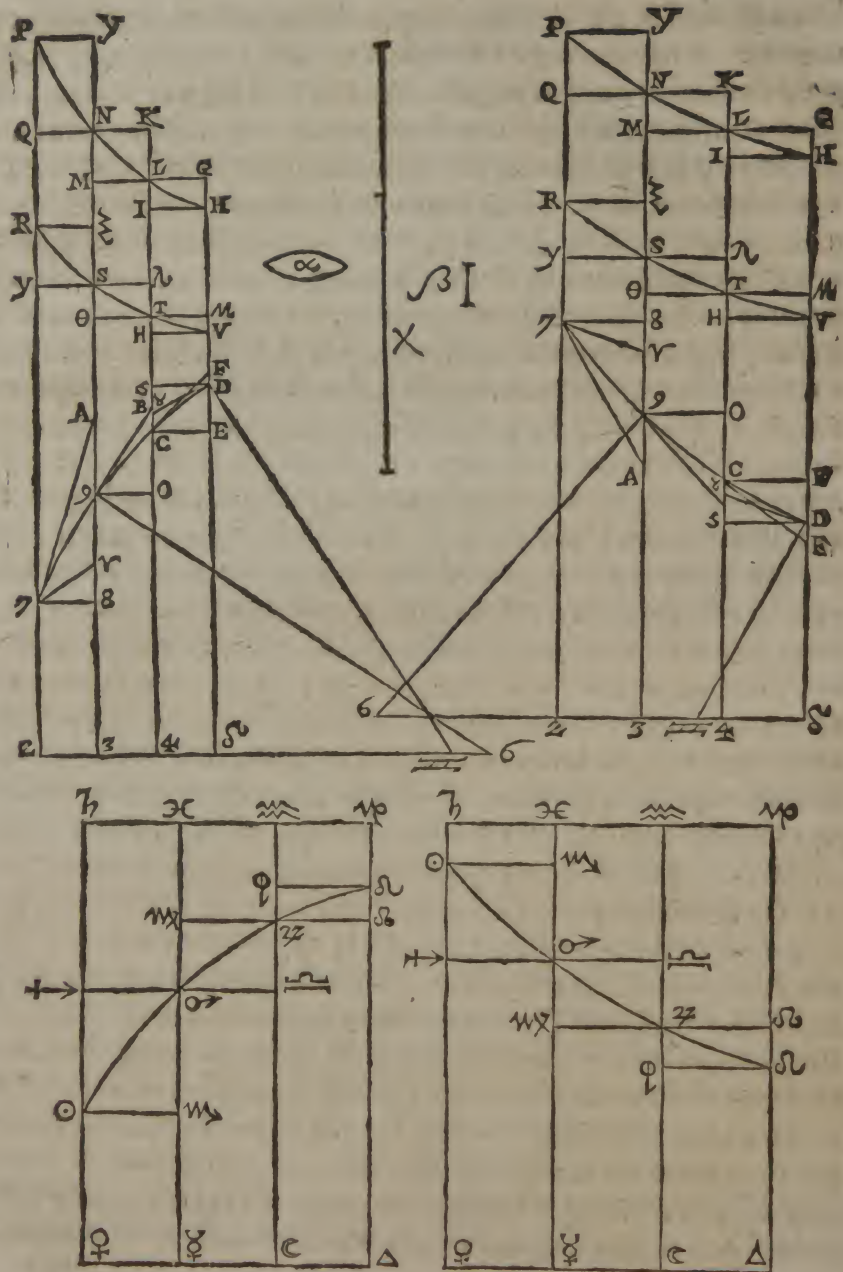
PROP. 2. THEOREMA.

Sit curva quæcunque $79 CD$ simplex, seu non sinuosa (si enim fuerit sinuosa, oportet illam in plures simplices dividere) super qua imaginetur superficies cylindrici recti, cuius altitudo recta X . a puncto quolibet curvæ nempe 9 in quamlibet rectam nempe 26 demittatur recta perpendicularis 93 . & ducatur in eandem 26 recta 96 curvam perpendiculariter secans in puncto 9 . producat recta 39 in S , ut $3S$ fiat æqualis rectæ 96 , idem quoque supponatur fieri in omnibus punctis curvæ $79 CD$, ita ut ex rectis in curvam perpendicularibus per propria sua curvæ puncta ad rectam 26 normaliter protractis confletur spatium RV & 2 a

A 2 curva

curva RSTV & rectis R 2, V δ , δ 2, comprehensum. Deinde
 fiat ut 93 ad S3 ita X altitudo cylindrici ad 3 N; idem fieri
 supponimus in omnibus aliis rectis spatii RV δ 2 recte 2 δ per-
 pendicularibus, ut compleatur spatium PH δ 2 comprehen-
 sum a curva PH & rectis H δ , P 2, 2 δ : hoc est intelligo duo
 mixtilinea esse descripta, quorum primi hæc est proprietas,
 ut ex eius curvæ puncto quocunque S in rectam 26 demissa
 perpendicularis S3 sit æqualis perpendiculari ad curvam 79
 CD in puncto transitus 9 nempe 96. secundi vero hæc sit
 proprietas, ut ex eius curvæ puncto quocunque N in rectam
 26 demissa perpendicularis N3 sit ad altitudinem cylindrici
 X, ut eius pars intercepta in primo mixtilineo S3 ad eius
 partem interceptam à curva data 93. dico mixtilineum se-
 cundum PH δ 2 esse æquale superficiei cylindrici recti, cuius
 basis est curva data 79 CD, & altitudo recta X. Si mixtili-
 neum PH δ 2 non est æquale superficiei cylindrici prædicti,
 inter illas erit aliqua differentia, quæ sit α planum: applicetur
 α planum ad rectam X, sitque latitudo inde oriens β . du-
 catur ex puncto 7 recta 7 A curvam 7 D tangens in puncto 7,
 & ex puncto D ducatur recta D γ curvam tangens in pun-
 cto D, sitque recte D γ parallela 7 ν , & ex punctis 7, D, in
 rectam 26 demittantur perpendiculares 72, δ D; dividatur-
 que recta 2 δ in tot partes æquales, ut ab extremitate ea-
 rum primæ erecta perpendiculari 3 A, excessus tangentis
 abscissæ 7 A supra parallellam abscissam 7 ν sit minor recta
 β , hoc enim semper fieri posse manifestum est, si tangens
 7 A non sit perpendicularis recte 2 δ , nec curva data sinuosa.
 a divisionum punctis 2, 3, 4, δ , excitentur perpendiculares
 2 P, 3 N, 4 L, δ H, curvam datam secantes in punctis 7, 9,
 C, D; curvam primam inventam secantes in punctis R, S, T, V,
 & secundam in punctis P, N, L, H; deinde curvam datam tan-
 gentes in punctis 7, 9, C, D, ducantur rectæ 7 A, 9 B, C F, D γ ,
 a proximis perpendicularibus terminatæ, sintque rectæ 78,
 99, C E, D δ , Y P, N K, L G, H I, L M, N Q, ipsis partibus æquali-
 bus

bus æquales & parallelæ, à perpendicularibus proximis ter-
 minatæ. Angulus B96 est rectus ob 9 B tangentem, & illi
 perpendicularem 96; angulus quoque O 93 est rectus, &
 ideo communem angulum O 96 auferendo, relinquitur an-
 gulus O 9 B æqualis angulo 693; triacula igitur rectangula
 O9B, 693, sūt similia, & proinde ut 93 ad 96 ita 9O ad 9B, sed
 ut 93 ad 96 ita X ad 3N; & ideo ut 9O ad 9B ita X ad 3N; &
 igitur rectangulum 9O in 3N nempe rectangulum N4 est
 æquale rectangulo 9B in X; eodē modo demonstratur rectan-
 gulum P3 esse æquale rectangulo 7A in X, item rectangu-
 lum Lδ esse æquale rectangulo CF in X; & ideo rectangulum
 rectæ X in rectas 7A, 9B, CF, simul, est æquale toti recti-
 lineo 2PYNKLGδ; est ergo rectangulum X in rectas 7A,
 9B, CF, simul, maior mixtilineo PNL. Hδ2. curvæ in puncto
 D fiat normalis Dπ, & ideo rectus est angulus πD8, sed
 rectus quoque est angulus δD5, & proinde commune afe-
 rendo, nempe δD8, relinquuntur anguli æquales δDπ, 8D5;
 sunt ergo triacula rectangula δDπ, 8D5, similia; & ideo
 ut δD ad Dπ, hoc est D5 ad D8 ita X ad δH, & ideo re-
 ctangulum δH in D5, hoc est rectangulum H4, æquale est
 rectangulo X in D8, hoc est, X in 7V; sed rectangulum
 M4 est æquale rectangulo Lδ, hoc est rectangulo X in CF;
 & rectangulum Q3 est æquale rectangulo N4, hoc est rectan-
 gulo X in 9B; & igitur rectilineum QNMLIHδ2 est æquale
 rectangulo X in rectas FC, B9, 7V, simul; est ergo rectangu-
 lum X in rectas FC, B9, 7V, simul, minor mixtilineo PNLH
 δ2. porro rectæ FC, B9, A7, simul, sunt maiores curva 79CD,
 & rectæ FC, B9, 7V, simul, sunt eadem curva minores, quod
 utrumq; patet ex antecedente; & igitur rectangulum X in
 rectas FC, B9, A7, maius est cylindrica superficie super cur-
 va 79CD, & rectangulum X in rectas FC, B9, 7V, eadem su-
 perficie minus: sed demonstratum est rectangulum X in re-
 ctas FC, B9, A7, maius esse mixtilineo PNLHδ2, & rectan-
 gulum X in rectas FC, B9, 7V, eodem mixtilineo esse minus, &
 pro-



proinde maior est differentia inter hæc rectangula, quàm inter superficiem cylindricam & mixtilineum; sed rectangulorum differentia est rectangulum X in differentiam rectarum $7A$, $7V$; est autem differentia rectarum $7A$, $7V$, minor recta β ex suppositione; & ideo differentia inter rectangula X in FC , $B9$, $A7$, simul, & X in FC , $B9$, $V7$, simul, minor est quantitate α , nempe facto ab X in β , hoc est ex positione, differentia inter superficiem cylindricam & mixtilineum, quod est absurdum, ostensa enim est maior, superficies igitur cylindrica & mixtilineum sunt æqualia, quod demonstrandum erat.

Quod si curva $7D$ non fuerit simplex sed sinuosa, dividenda est in plures simplices, & demonstratio in vnaquaque seorsim instituenda.

Si vero tangens $7A$ fuerit perpendicularis ad rectam 78 , mixtilineum $PNLH\delta_2$ extendetur in infinitum ad partes P : hoc tamen non obstante; dico adhuc mixtilineum $PNLH\delta_2$ æquale esse superficiei cylindrici recti super curva $79CD$, cuius altitudo X . Si non sunt æqualia, sit (si fieri potest) mixtilineum maius superficiei, & recta $N3$ rectæ $H\delta$ parallela abscindatur mixtilineum $NLH\delta_3$ æquale superficiei super curva $79CD$, hoc enim absque dubio fieri potest: eodemque modo, quo ante, demonstratur mixtilineum $NLH\delta_3$ æquale esse superficiei super $9CD$; sunt ergo æquales, superficies cylindrici recti cuius altitudo X , super curvis $9CD$, $79CD$, quod est absurdum; mixtilineum ergo $PNLH\delta_2$ non est maius dicta superficiei cylindricæ: sit (si fieri potest) minus; & abscindatur $9D$ curva, ita ut superficies cylindrici recti super $9D$ existens, æqualis fiat mixtilineo $PNLH\delta_2$, & ducatur 39 N rectæ $H\delta$ parallela: demonstratur ut ante superficiem cylindrici recti super $9D$ existentem, æqualem esse mixtilineo $NLH\delta_3$; sed ex suppositione eadem superficies cylindrici recti æqualis est mixtilineo $PNLH\delta_2$; mixtilinea ergo $PNLH\delta_2$, $NLH\delta_3$, sunt inter se æqualia, quod est absurdum; & ideo mixtilineum non est minus superficiei,
sed

sed etiam demonstratum est, nec esse maius, superficies igitur cylindrici recti super curva 7D cuius altitudo est X, æqualis est mixtilineo PNLHδ2, etiam quando tangens 7A rectæ 78 est perpendicularis, quod demonstrandum erat.

Ex demonstratione manifestum est mixtilineū PNLHδ2 & superficiem cylindricam super curva 79CD esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur de integris, eodem modo demonstratur de partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam 2δ; sed ipsa curva 7D est magnitudine & gravitate analoga cum superficie cylindrica; & ideo curva est etiam magnitudine & gravitate analoga cum mixtilineo idem cum reliquis centrum habens æquilibrii in recta 2δ. perspicuum quoque est mixtilineum PNLHδ2 esse ad rectangulum X. in 2δ, ut curva 79CD ad rectam 2δ.







P R O P. 3. T H E O R E M A.

Eisdem positis quæ prius; supponatur prædicta superficies cylindrici recti super curva 79DC secari a plano per rectam 2δ transeunte, & in angulo semirecto ad planum Dδ2 inclinante. inferiorem superficiem cylindricæ partem a plano sectam appellamus trunci superficiem. Dico trunci superficiem æqualem esse mixtilineo RSTVδ2. supponatur extendi curva 79CD in rectam sibi æqualem ♀ ♀ ● Δ, & iungatur recta Δ ♀ æqualis rectæ X, ut compleatur rectangulum ♀ ♀ Δ ♀, quod necessario æquale est tam superficiem cylindrici quam mixtilineo PNLHδ2. Sit ♀ ● æqualis rectæ 27, & a puncto ● ducatur curva ● ♂ ♀ Ω talis naturæ, ut sumpta recta quacunque ♀ ♀ equali curvæ particulæ cuiusque nempe 79, perpendicularis ad rectam ♀ Δ ex puncto ♀ in curvam ● Ω, nempe ♀ ♂, fiat æqualis perpen-

diculari ex puncto θ in rectam 2δ , nimirum $\theta 3$: manifestum
 est mixtilineum $\odot \sigma \varphi \Omega \Delta \varphi$ esse æquale superfici trunci,
 quoniam inclinatio plani secantis supponitur esse angulus
 semirectus: nostrum ergo est demonstrare æqualitatem mix-
 tilineorum $RSTV\delta 2$, $\odot \sigma \varphi \Omega \Delta \varphi$: primo nos hanc æquali-
 tatem demonstrabimus in postremis figuris, ubi supponimus
 curvam RV in progressu ab R ad V rectam 2δ semper magis
 appropinquare, & etiam curvam γD in progressu a γ ad D
 ad eandem rectam magis appropinquare; & ideo curva $\odot \Omega$
 in progressu a \odot ad Ω eo magis appropinquat rectam $\varphi \Delta$,
 quoniam eodem modo appropinquat curva $\odot \Omega$ rectam $\varphi \Delta$,
 quo γD rectam 2δ . Si prædicta mixtilinea non sunt æqua-
 lia, sit inter illa α differentia: & mixtilineum $RV\delta 2$ diuida-
 tur à tot rectis rectæ $R2$ parallelis, nempe $S3, T4, V\delta, R2$,
 ut ab earum cum curva intersectionibus R, S, T, V , utrinque
 ductis ad parallelas proximas perpendicularibus $R\xi, S\gamma, S\lambda$,
 $T\theta, T\mu, V\eta$, fiant duo rectilinea, nempe $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$ extra
 mixtilineum & $\gamma S\theta T\eta V\delta 2$ intra mixtilineum, quorum dif-
 ferentia sit minor quam α , evidens enim est hoc fieri posse.
 producantur rectæ $S3, T4$, ut utrasque curvas $PH, \gamma D$, inter-
 secent in punctis N, L, γ, C , & iungantur parallelæ, rectæ
 $2\delta; PY, NQ, NK, LM, LG, HI$, a rectis mixtilineum diuiden-
 tibus terminatæ. Deinde diuidatur rectangulum $\eta \Delta$ a re-
 ctis, rectæ $\eta \Delta$ parallelis, $\eta \varphi, \chi \varphi, \omega \odot, \eta \Delta$, in rectangulū
 $\eta \varphi$ æquale mixtilineo $PN3 2$, rectangulum $\chi \odot$ æquale
 mixtilineo $NL4 3$, & rectangulum $\omega \Delta$ æquale mixtilineo
 $LH\delta 4$. & ab intersectionibus rectarum rectangulum $\eta \Delta$ di-
 videntium cum curva $\odot \Omega$, nempe $\odot, \sigma, \varphi, \Omega$, ducantur per-
 pendiculares vtrique in dividentes proximas, nempe $\odot \sigma$,
 $\sigma \varphi, \varphi \Omega, \varphi \delta, \Omega \varphi$, ita ut $\varphi \sigma \varphi \varphi \Omega \Delta \varphi$ fiat rectilineum
 intra mixtilineum, & $\odot \sigma \sigma \varphi \varphi \Omega \Delta \varphi$ fiat rectilineum ei-
 dem mixtilineo circumscriptum. Patet ex antecedente $P2$
 esse ad X seu $\eta \varphi$, ut $R2$ ad $\gamma 2$ seu $\odot \varphi$, & permutando ut $P2$
 ad $R2$ ita $\eta \varphi$ ad $\odot \varphi$; & ideo ut $P3$ ad $R3$ ita $\eta \varphi$ ad $\odot \varphi$; sed

B

re.

cta mixtilinea non sunt æqualia, sit eorum differentia α :
 deinde mixtilinea $RSTV\delta_2$, , $\phi\Omega\Delta\phi$, dividantur à
 rectis perpendicularibus ad eorum bases 2δ , $\phi\Delta$, omnino
 ut in antecedente demonstratione factum est, hac tamen
 lege ut differentia rectilinearum $R\xi S\lambda T\mu\delta_2$, $\gamma S\theta T\eta V\delta_2$, item
 & differentia rectilinearum $\pi\sigma\eta\phi\phi\Omega\Delta\phi$, , $\phi\Omega\Delta\phi$,
 simul, sint minores quantitate α ; manifestum est enim hoc
 esse possibile, cum hæc divisio in infinitum fieri possit. ea-
 dem methodo, qua in priore demonstratione usi sumus,
 demonstratur rectilineum $R\xi S\lambda T\mu\delta_2$ maius esse rectilineo
, $\phi\Omega\Delta\phi$, & rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta_2$ minus esse
 rectilineo $\pi\sigma\eta\phi\phi\Omega\Delta\phi$. Hisce intellectis, si data mixti-
 lineæ non sunt æqualia, sit $RSTV\delta_2$ maius altero: manife-
 stum est excessum rectilinei $R\xi S\lambda T\mu\delta_2$ supra rectilineum
, $\phi\Omega\Delta\phi$ æquale esse omnibus rectangulis $\gamma\xi$, $\theta\lambda$, $\eta\mu$,
 $\pi\sigma$, $\eta\phi$, $\phi\Omega$, simul, sublato excessu rectilinei $\pi\sigma\eta\phi\phi\Omega\Delta\phi$
 supra rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta_2$; sed excessus mix-
 tilinei maioris supra mixtilineum minus, est minor dicto
 excessu rectilinearum, quoniam mixtilineum maius est
 minus rectilineo maiore, & mixtilineum minus est ma-
 ius rectilineo minore; & ideo excessus mixtilinei maioris
 supra mixtilineum minus, minor est dictis rectangulis si-
 mul, sublato excessu rectilinei $\pi\sigma\eta\phi\phi\Omega\Delta\phi$ supra recti-
 lineum $\gamma S\theta T\eta V\delta_2$; sed dicta rectangula simul ex hypo-
 thesi minora sunt quantitate α , & ideo dicta rectangula si-
 mul sublato dicto excessu multo minora sunt quantitate α ;
 & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore
 excessu quam α , quod est absurdum, ponitur enim α ex-
 cessus mixtilinei maioris supra minus; non est ergo mixtili-
 neum $RSTV\delta_2$ maius mixtilineo , $\phi\Omega\Delta\phi$: sit (si fieri
 potest) minus; manifestum est excessum rectilinei $\pi\sigma\eta\phi\phi\Omega\Delta\phi$
 supra rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta_2$ æqualem esse omni-
 bus rectangulis $\pi\sigma$, $\eta\phi$, $\phi\Omega$, $\gamma\xi$, $\theta\lambda$, $\eta\mu$, simul, sublato ex-
 cessu rectilinei $R\xi S\lambda T\mu\delta_2$ supra rectilineum , $\phi\Omega\Delta\phi$;

B 2 sed

sed excessus mixtilinei maioris $\odot \sigma \varphi \Omega \Delta \varphi$ supra mixtilineum minus $RSTV\delta_2$, est minor dicto excessu rectilinearum, quoniam mixtilineum maius est minus rectilineo maiore & mixtilineum minus est maius rectilineo minore; & ideo excessus mixtilinei maioris supra minus minor est dictis rectangulis simul sublato excessu rectilinei $R\Xi S\lambda T\mu\delta_2$ supra rectilineum $\odot \sigma \varphi \Omega \Delta \varphi$; sed dicta rectangula simul, ex hypothesi, minora sunt quam α ; & ideo dicta rectangula simul sublato dicto excessu multo minora sunt quam α ; & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore excessu quam α , quod est absurdum, ponitur enim α excessus mixtilinei maioris supra minus; non est ergo mixtilineum $\odot \sigma \varphi \Omega \Delta \varphi$ maius mixtilineo $RSTV\delta_2$, sed demonstratum est etiam nec esse minus; sunt igitur mixtilinea $\odot \sigma \varphi \Omega \Delta \varphi$, $RSTV\delta_2$, inter se æqualia, quod demonstrandum erat.

Sunt etiam alii huius theorematis casus, quibus omnibus potest applicari hæc secunda demonstratio; volui tamen priorem etiam adhibere, quoniam mihi apparet simplicior, etiam si non sit generalis; lectorem tamen admoneo illam priorem posse adhibere in casu maxime ordinario, nempe in figuris prioribus, reliquis manentibus dum curva RV in progressu ab R ad V magis a recta 2δ elongatur.

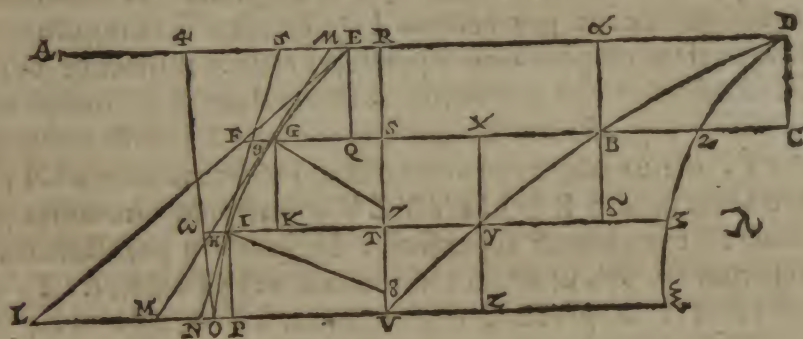
Ex demonstratione manifestum est mixtilineum $RSTV\delta_2$ & superficiem trunci esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur in integris, eodẽ etiam modo demonstratur in partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam δ_2 .

Non existimo opus esse Lectorem admonere, quod data hac vna trunci superficie, dentur omnes aliæ, quarum plana secantia, basem (si opus est) productæ in eadem recta secant, tales enim truncorum superficies inter se sunt ut earum altitudines, vel ut tangentes inclinationum planorum secantium

tium, ut vulgo, & facillime demonstratur.

PROP. 4. THEOREMA.

Sit curva quęcunque OIG E simplex & non sinuosa, ductantur duę rectę utcunque inter se parallele AD, Lξ, cui vtrique sit normalis recta RV. Sit mixtilineum RVYBD talis naturę, ut, ducta recta GSB ad libitum parallela rectis AD, Lξ, recta SB contenta inter rectam RV & curvam VYBD sit semper æqualis rectę GM tangenti curvam in puncto G protractę ad rectam Lξ. concipiatur super curva OIG E (cuius talis est curvitas, ut quo longius a puncto O produci-
toreo minus distet a recta RV) superficies cylindrici recti secta à plano transeunte per rectam L ξ & cylindrici basem



in angulo semirecto secante. Dico mixtilineum RVYBD esse æquale superfici trunci inferioris cylindrici a plano re-
sectę. Si non sint æqualia, sit eorum differentia λ, divida-
turque recta RV in tot partes æquales in punctis R, S, T, V,
ut ductis rectis parallelis RD nempe SC, Tδ, VZ, & comple-
tis reatungulis RC, RB, Sδ, SY, TZ, differentia reatilinei
R = BXYT mixtilineo inscripti a reatilineo RDCBδYZV
eidem mixtilineo circumscripto sit minor quantitate λ; ma-
nifestum

nifestum enim est hoc fieri posse, quoniam recta RV dividi potest in plures, & adhuc plures partes in infinitum. Producantur rectæ parallellæ DR , CS , δT , ZV , per curvam propositam in puncta E , G , I , O , & producantur rectæ EL , GM , IN , curvam tangentes in punctis E , G , I , O , ad rectam $L\xi$ in punctis L , M , N , O , quæ parallellas proximas ex utraque parte intersecant etiam in punctis F , H , N , ω , θ , μ ; & ad parallellas proximas sint perpendiculares EQ , GK , IP . manifestum est (ob parallelismum rectarum GK , SV) GK esse ad GH ut SV ad GM seu SB , & proinde rectangulum $S\delta$, nempe rectæ GK in SB , æquale est rectangulo GH in SV , sed rectangulum GH in SV maius est portione superficiei trunci insistente curvæ GI , quoniam GH recta maior est curva GI & recta SV æqualis est maximæ altitudini portionis superficiei cylindrici insistentis curvæ GI ob planum seminormaliter basem secans per rectam $L\xi$; & ideo rectangulum $S\delta$ maius etiam est portione superficiei trunci insistente curvæ GI : eodem modo probatur rectangulum RC maius esse portione superficiei trunci insistente curvæ GE & rectangulum TZ maius esse superficiei trunci insistente curvæ OI ; & ideo rectilineum $RDCB\delta YZV$ mixtilineo circumscriptum maius est tota trunci superficiei. Deinde ob parallelismum rectarum IP , SV , ut IP ad IN , seu GK vel ST ad θI , ita TV ad IN vel TY ; & proinde rectangulum SY nempe rectæ ST in TY æquale est rectangulo rectæ θI in TV , sed rectangulum θI in TV minor est portione superficiei trunci insistente curvæ IG , quoniam recta θI minor est curva GI & recta TV æqualis est minimæ altitudini eiusdem portionis superficiei trunci insistentis curvæ GI , ob planum seminormaliter basem secans per rectam $L\xi$; & ideo rectangulum SY minus est portione superficiei trunci insistente curvæ GI : eodem modo probatur rectangulum RB minus esse portione superficiei trunci insistentis curvæ GE ; & ideo rectilineum $TYXBaR$ mixtilineo inscriptum minus est integra superficiei trun-

trunci, sed differentia inter rectilineum inscriptum & circumscriptum minor est quantitate λ ex suppositione; & ideo differentia inter superficiem trunci & figuram mixtilineam multo minor est quam λ , quoniam earum utraque demonstratur maior rectilineo inscripto & minor circumscripto, quod fieri non potest, ponitur enim λ differentia inter superficiem trunci & mixtilineum; nulla igitur est differentia inter figuram mixtilineam & superficiem trunci, & proinde sunt æquales, quod demonstrandum erat.

eisdem positis, sit mixtilineum $VYBD$ 2 3 ξ talis naturæ, ut, a quolibet puncto curvæ EO nempe G ducta parallela rectæ $L\xi$ nempe $G2$, intercepta recta $B2$ inter duas curvas VD , $D\xi$, fiat æqualis tangenti curvam propositam in puncto G protractæ ad rectam AD , nempe rectæ $G\mu$. dico mixtilineum $VYBD$ 2 3 ξ æquale esse superficiem trunci superioris eiusdem prioris cylindrici posita eius altitudine recta RV . rectæ $MG\mu$ in puncto G sit recta normalis $G7$ rectam RV secans in puncto 7. ob similitudinem triangulorum $SG7$, GKH , ut GS ad $G7$ ita GK ad GH , & ut GK ad GH ita SV ad GM vel SB , & SR ad $G\mu$ vel $B2$; & ideo GSe sit ad $G7$ ut RV ad $S2$. eodem modo demonstrari potest IT esse ad 18 ut RV ad $T3$: cumque hoc fiat in omnibus punctis curvæ EO , manifestum est ex huius 2 mixtilineum RD 2 3 ξ V esse æquale superficiem cylindrici recti insistenti curvæ EO , cuius altitudo RV ; atque superficies trunci inferioris æqualis est mixtilineo $RVYBD$, & proinde superficies trunci superioris æqualis est mixtilineo $DBYV\xi$ 3 2 D , quod demonstrare oportuit.

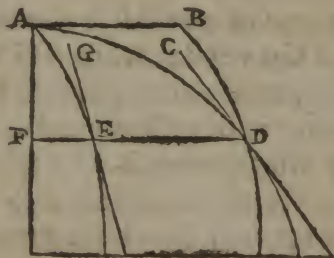
Hinc etiam manifestum est superficiem trunci inferioris & mixtilineum $RVYBD$ esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur de integris, eodem modo demonstratur de partibus earum proportionalibus. Manifestum quoque est superficiem trunci superioris & mixtilineum $VYBD$ 2 3 ξ esse
quan-

quantitates magnitudine & gravitate analogas; mixtili-
neum enim $R V \xi 3 2 D$ magnitudine & gravitate analogum
est toti superficiei cylindrici recti, & mixtilineum $R V Y B D$
magnitudine & gravitate analogum est superficiei trunci
inferioris; & ideo (quod superest) mixtilineum $D B Y V \xi$
 $3 2 D$ analogum est reliquæ superficiei trunci superioris,
quod &c.

Huius propositionis diversi sunt casus; sed in omnibus
eodem modo verificari potest præcedens conclusio.

P R O P. 5. T H E O R E M A.

AD rectam $A F$ ducantur duæ curvæ $A E$, $A D$, & rectæ
 $A F$ sit perpendicularis rectæ $F D$ curvas secans in
punctis E , D , ducanturque rectæ $G E$, $C D$, curvas tangentes.
Dico rectas $E G$, $D C$, non esse parallellas: sint (si fieri po-



test) parallelæ, & ducatur recta AB parallela & æqualis re-
ctæ $E D$: deinde per puncta B , D , ducatur curva congruens
curvæ $A E$, si modo punctum A superponatur puncto B &
punctum E puncto D : manifestum est curvam $B D$ secare cur-
vam $B D$, item & rectam $C D$ parallelam rectæ $G E$ tangere
curvam $A D$; atque $C D$ ex suppositione tangit quoque cur-
vam $B D$, quod est absurdum, quoniam curvæ $A D$, $B D$, se
inui-

inuicem secant; rectæ igitur CD, GE, non sunt parallellæ quod demonstrandum erat.

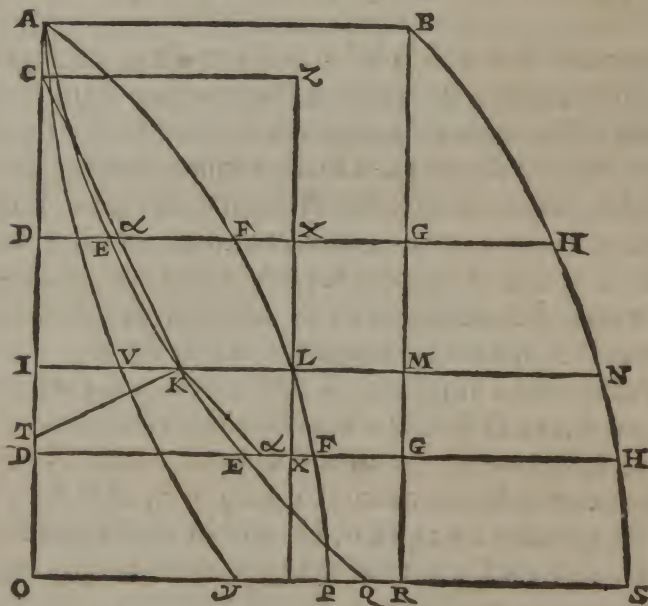
Animaduertendum est nos hic tantum loqui de illis curvis simplicibus, quæ (quo longius distant ab A) eo maiorem intercipiunt rectam ED; nam ex hac suppositione pendet demonstrationis vis.

PROP. 6. PROBLEMA.

Inuenire curuam, quæ ad suum axem eandem habeat rationem, quam figura qualibet exhibita ad rectangulum sibi inscriptum, & recta data seu quæsita curuæ axi applicatam.

SIt figura exhibita ABSO, rectangulum inscriptum ABRO; sitque curva BS simplex seu non sinuosa, si autem sit, diuidenda est in plures simplices, & demonstratio seorsim institienda. deinde sit curva AFLP talis naturæ, ut, ducta recta quacunque IN normali rectæ AO, curuam AFLP secante in L, recta IN sit æqualis potentia utrique IL, IM: deinde ducatur curva AEKQ talis naturæ, ut, ducta recta quacunque IM rectæ AO perpendiculari & curuam AEKQ secante in K & AFLP in L, rectangulum MIL sit æquale mixtilineo I AFL. dico figuram ABSO esse ad rectangulum ABRO ut curva AEKQ ad rectam AO. sit in curva AFLP punctum ad libitum K, per quod ducatur recta IN perpendicularis rectæ AO & lineas AFLP, BR, BHNS, secans in L, M, N, punctis; sitque ut IL ad IM ita IK ad IC & ducatur KC: recta KC curuam AQ secat vel tangit in puncto K; si fieri potest, eam secet in K, & ideo intra curuam cadet nempe intra punctum E versus verticem A: ducatur per punctum E recta DH rectæ IN parallella lineas AQ, AP, BR, BS, secans in punctis E, F, G, H, & rectam LC in a, item compleatur rectangulum ILZC, cuius latus LZ rectam DH secet in X. quoniam IL est ad IM ut IK ad IC, erit rectan-
C gulum

gulum MIK seu mixtilineum I A F L æquale rectangulo I Z: & quoniam rectangulum G D E est æquale mixtilineo D A F, erit ut I K ad D E ita mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A F, at I K ad D E maiorem habet rationem quam ad D α ; & ideo mixtilineum I A F L maiorem habet rationem ad mixtilineum D A F quam I K habet ad D α seu I C ad D C; & igitur mixtilineum I A F L maiorem habet rationem ad mixtilineum D A F quam rectangulum I Z ad rectangulum D Z, & per conversionem rationis mixtilineum I A F L ad mixtilineum I D F L habet minorem rationem quam re-



ctangulum I Z ad rectangulum I X, & permutando mixtilineū I A F L ad rectangulum I Z minorem habet rationem quam mixtilineum I D F L ad rectangulum I X, cumq; rectangulū I Z sit æquale mixtilineo I A F L, erit rectangulum I X minus
mix-

mixtilineo $IDFL$, sed & maius est, quod est absurdum; & proinde recta KC intra curvam AQ non cadit versus verticem: si fieri potest, cadat recta CK intra curvam versus basem reliquis se habentibus ut in priore positione; eritque ut IK ad DE ita mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $DALF$, at IK ad DE maiorem habet rationem quam ad Da ; & ideo mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $DALF$ maiorem habet rationem quam IK ad Da seu IC ad DC ; & igitur mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $DALF$ maiorem habet rationem quam rectangulum IZ ad rectangulum DZ , & inuertendo, per conversionem rationis & rursus inuertendo, mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $IDFL$ maiorem habet rationem quam rectangulum IZ ad rectangulum IX , & permutando mixtilineum $IAFL$ ad rectangulum IZ maiorem habet rationem quam mixtilineum $IDFL$ ad rectangulum IX , cumque mixtilineum $IAFL$ sit æquale rectangulo IZ , erit rectangulum IX maius quam mixtilineum $IDFL$, sed & minus est, quod est absurdum; non cadit ergo recta CK intra curvam AQ versus basem; & ideo recta KC curvam AQ tangit in puncto K , rectæ CK sit perpendicularis recta KT rectæ AO occurrens in T ; manifestum est CI esse ad CK ut IK ad KT ; atque CI est ad CK ut MI ad NI , quoniam rectæ IN , IM , IL , efficiunt triangulum rectangulum simile triangulo CIK , cuius latera IM , IN , sunt homologa lateribus CI , CK ; & proinde ut IK ad KT ita IM ad IN ; cumque hoc eodem modo fiat in omnibus punctis curvæ AQ , manifestum est ex huius rectam AO esse ad curvam AQ ut rectangulum OB ad figuram $ABSO$, quod demonstrare oportuit.

SCHOLIVM.

H Vius propositionis inversum facile quoque demonstratur; nempe, si recta AO sit ad curvam AQ ut rectangulum OB ad figuram $ABSO$, item si curva AP talis

C a sit

fit naturæ ut ducta IN quæcunque AO rectæ perpendicularis æqualeat potentia utrique IL , IM ; erit rectangulum MIK æquale mixtilineo $IAFL$: si non fit ita, ducatur curva AVY talis naturæ ut rectangulum $MI V$ fiat æquale mixtilineo $IAFL$, & demonstrabitur secundum tenorem huius propositionis rectas (quæ curvas AY , AQ , tangunt in punctis V & K) esse inter se parallelas, quod est absurdum contra propositionem præcedentem.

Huius etiam propositionis varii sunt casus, sed hoc intellecto, in reliquis nulla restat difficultas.

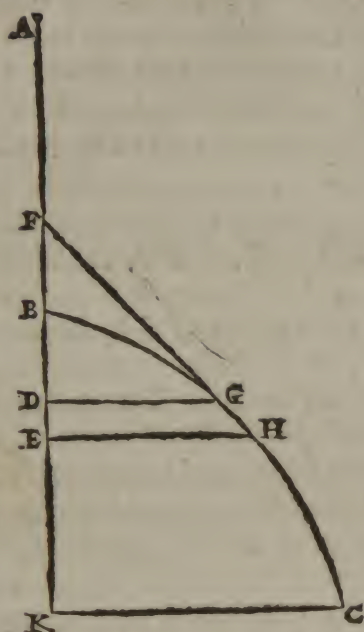
PROP. 7. PROBLEMA.

Rectam ducere datam curvam tangentem in eius puncto dato, si modo curva sit ex earum numero, quas Cartesius appellat Geometricas.

Sit curva BHC hyperbola, cuius diameter recta AK & ordinatim applicatæ EH , KC , talis naturæ, ut solidum ex quadrato $a BE$ in AE sit ad solidum ex quadrato $a BK$ in AK ut cubus $ab EH$ ad cubum $a KC$. Sit AB data a , BE b , & ratio solidi ex quadrato $a BE$ in AE ad cubum $ab EH$ ut a^3 ad c^3 : oportet invenire punctum F , ut ducta recta FH hyperbolam tangat in puncto H . ex datis AB , BE , datur AE $a + b$ & EH \sqrt{C} ($ab^2 c^3 + b^3 c^3$). Sit EF z & DE nihil seu serum 0 ; &

proinde erit BD $b - 0$ & AD $a + b - 0$, FD $z - 0$ item DG \sqrt{C} ($c^3 ab^2 - 2 c^3 ab 0 + c^3 a 0^2 + c^3 b^3 - 3 c^3 b^2 0 + 3 c^3 b 0^2 - c^3 0^3$).

quoniam supponimus ordinatim applicatam DG incidere in curvam in eodem puncto G ubi recta FH eidem (si modo possibile sit) curvæ occurrit, erit ut EH ad EF ita DG ad DF ; & ideo rectangulum ex DF in EH nempe $\sqrt{C}(b^2 c^3 a z^3 -$



$3b^2c^3az^2o + 3b^2c^3az^2o - b^2c^3ao^3 + b^3c^3z^3 - 3b^3c^3z^2o$
 $+ 3b^3c^3z^2o - b^3c^3o^3$ æquale erit rectangulo EF in DG

nempe $\sqrt{C(c^3ab^2z^3 - 2c^3abz^3o + c^3az^3o^2 + c^3b^3z^3 -$
 $3c^3b^2z^3o + 3c^3bz^3o^2 - c^3z^3o^3)}$; & denominatores

propter æqualitatem auferendo, item & utrumque æquatio-
 nis terminum cubice multiplicando & æqualia utrinque au-
 ferendo resultat æquatio hæc $3b^2c^3az^2o - 3b^2c^3az^2o - b^2c^3ao^3 -$
 $3b^3c^3z^2o + 3b^3c^3z^2o - b^3c^3o^3 = c^3az^3o^2 - 2c^3abz^3o - 3c^3b^2z^3o +$
 $3c^3bz^3o^2 - c^3z^3o^3$, & omnia per o dividendo $3b^2c^3az^2o - 3b^2c^3az^2o$
 $- b^2c^3ao^2 - 3b^3c^3z^2 + 3b^3c^3z^2o - b^3c^3o^2 = c^3az^3o - 2c^3abz^3 -$
 $3c^3$

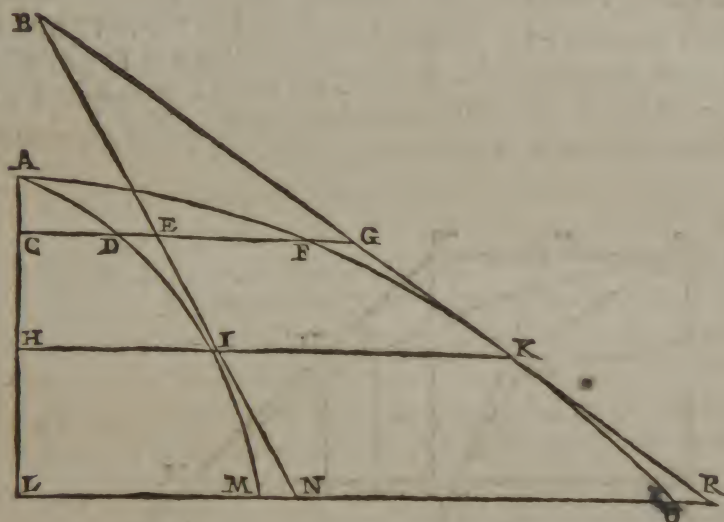
$3c^3bz^3 + 3c^3bz^2 - c^3z^3$, & quantitates reiiciendo in quibus
reperitur o vel eius potestas, restant $-3b^2c^3az^2 - 3b^3c^3z^2 =$
 $-2c^3ab^2z^3 - 3c^3b^2z^3$, & ubique defectus addendo & omnia
dividendo per c^3bz^3 , æquatio est $3ba + 3b^2 = 2az + 3bz$, &
ideo $z = \frac{3ba + 3b^2}{a^2 + 3b}$ nempe recta EF, quæ inuenienda erat.

PROP. 8. PROBLEMA.

Sit curva ADIM cuius axis AL, sitque alia curua AFKO
eius naturæ, ut, ducta recta quacunque HIK, re-
ctæ AL perpendiculari, curva AI sit ad rectam IK ut Pad Q.
oportet ducere rectam tangentem curvam AFKO in pun-
cto K: ducatur recta BI tangens curvam ADIM in puncto I
(hoc enim fieri posse supponimus) sitque recta IB æqualis
curvæ AI & ducatur recta BK, quam dico tangere curvam
AFKO in puncto K: si eam non tangat, cadat intra, sitque
punctum G intra curvam versus verticem, & ducatur rectæ
KH parallella GFEDC. manifestum est IK esse ad EG ut
IB ad EB, & per conuersionem rationis IK est ad differen-
tiam inter IK & EG ut IB ad IE & permutando ut IK ad IB
seu IA curvam, hoc est ut Qad P, ita differentia inter IK & EG
ad EI, atque ut Qad P ita DF ad DA curvā; & ideo ut IK ad
IA curuam ita DF ad DA curvam, & permutando ut IK ad
DF ita IA curua ad DA curvam, & per conuersionem ra-
tionis, ut IK ad differentiam inter IK & DF ita curva
IA seu recta IB ad curvam ID; at differentia inter IK & EG
maior est differentia inter IK & DF, quoniam punctum G
supponitur cadere intra curvam; & proinde IK minorem
habet rationem ad excessum supra EG quam ad excessum
supra DF; & ideo IB est ad IE in minore ratione quam ad DI,
est igitur IE maior quam DI, quod est absurdum, non ergo
cadit recta BK intra curvam AFKO versus verticem: cadat
intra (si fieri potest) versus basem nempe producta in pun-
cto

i hu-
ius.

Ad R. IK est ad NR ut IB ad NB, & IK est ad differentiam inter IK & NR ut IB ad IN, & permutando ut IK ad IB seu IA curvam, hoc est ut Q ad P ita differentia inter IK & NR ad IN, atque ut Q ad P ita MO ad MA curvam, & ideo ut IK ad IA curvam ita MO ad MA curvam, & permutando ut IK ad MO ita IA curva ad MA curvam, & ut IK ad differentiam inter IK & MO ita IA curva seu IB ad IM curvam; at differen-



tia inter IK & NR minor est differentia inter IK & MO, quoniam supponimus R cadere intra curvam; & proinde IK maiorem habet rationem ad differentiam inter IK & NR quam ad differentiam inter IK & MO; & ideo IB est ad IN in maiore proportionem quam ad IM; est igitur IN minor quam IM, ^{i huius} quod est absurdum, non ergo cadit recta BK intra curvam ^{ius.} versus basem, & proinde curvam tangit in puncto K, quod demonstrare oportuit.

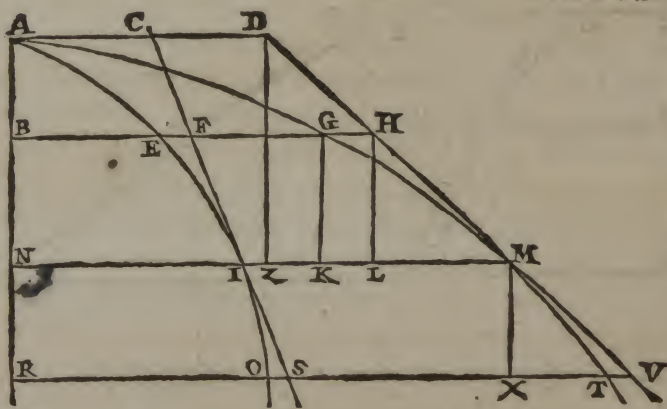
Per hanc propositionem possunt omnium cycloidum cur-

væ

væ comparari cum suis axibus vel basibus secundum methodum 2 huius.

PROP. 9. PROBLEMA.

Sit curva AEIO, cuius axis AR; sitque alia curva AGMT talis naturæ, ut ducta recta quæcunque NIM rectæ AR perpendiculari, curva AI sit ad rectam NM ut P ad Q. oportet ducere rectam tangentem curvam AGMT in puncto M. ducatur recta IC tangens curvam AEIO in I (hoc enim fieri posse supponimus) & occurrens rectæ AD ipsi NM parallele in D. sit MZ ad rectam IC ut Q ad P, sitque ZD parallela rectæ AR & ducatur recta DM, quam dico esse tan-



gentem curvæ AGMT in puncto M: si eam non tangat, cadat intra, sitque punctum H intra curvam versus verticem & ducatur ipsi NM parallela reliquis lineis secans vt in figura. AE est ad BG ut P ad Q & AI est ad NM ut P ad Q, & ideo ut AE ad BG ita AI ad NM & permutando ut AE ad AI ita BG ad NM, & ut AE ad EI ita BG ad KM, & permutando

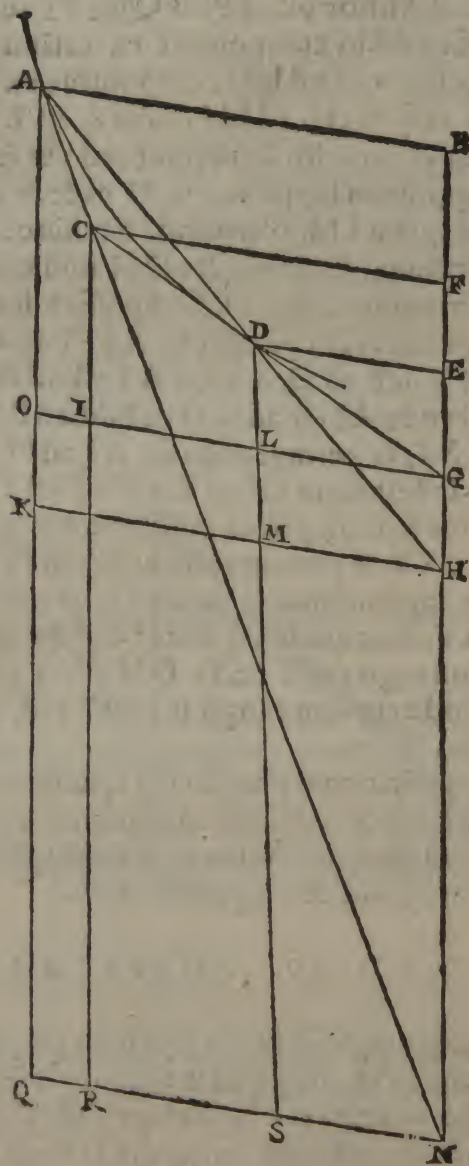
mutando ut AE ad BG , hoc est ut P ad Q ita EI ad KM : de-
 inde ut CI ad ZM , hoc est ut P ad Q ita FI ad LM , quod sic
 probo, ratio CI ad ZM componitur ex ratione CI ad DZ &
 DZ ad ZM , & ratio FI ad LM componitur ex ratione FI ad
 HL seu CI ad DZ & HL ad LM seu DZ ad ZM , & proinde
 ut EI ad KM ita FI ad LM , & permutando ut EI ad FI ita KM
 ad LM ; sed quoniam supponimus H cadere intra curvam,
 KM erit minor quam LM , & proinde EI minor erit quam FI , i hu-
ius
 quod est absurdum; & ideo recta DM non cadet intra cur-
 vam versus verticem: cadat (si fieri possit) intra versus ba-
 sem, nempe producta in puncto V . AI est ad NM ut P ad Q
 & AO est ad RT ut P ad Q , & ideo AI est ad NM ut AO ad
 RT , & permutando AI est ad AO ut NM ad RT , & ut AI ad
 IO ita NM ad XT , & permutando ut AI ad NM seu ut P ad
 Q ita IO ad XT : deinde ut CI ad ZM seu P ad Q ita IS ad XV
 (quod probatur sicut in priore positione) & proinde ut IO
 ad XT ita IS ad XV , & permutando ut IO ad IS ita XT ad XV ;
 sed (quoniam supponimus V cadere intra curvam) erit XT
 maior quam XV ; & proinde IO maior erit quam IS , quod est
 absurdum, non ergo cadit recta DM intra curvam versus i hu-
ius
 basem, & proinde curvam tangit in puncto M , quod demon-
 strare oportuit.

Per hanc propositionem potest curva, cuiuscunque superficiei
 trunci cylindrici recti expansæ in planum, comparari cum
 eiusdem axe vel base ope huius 2, si modo possit duci recta
 tangens basem cylindrici in puncto dato.

PROP. 10. THEOREMA.

Sit curva quęcunque AD & recta quęcunque BN : ducan-
 tur ex duobus curvę punctis quibuscunque A, D , duę
 rectę parallelę ad rectam BN , nempe AB, DE , & iungatur
 AD recta producta in H , ducanturque DG, AN , rectę cur-
 vam tangentes in punctis A, D : deinde compleantur paralle-

D lo-



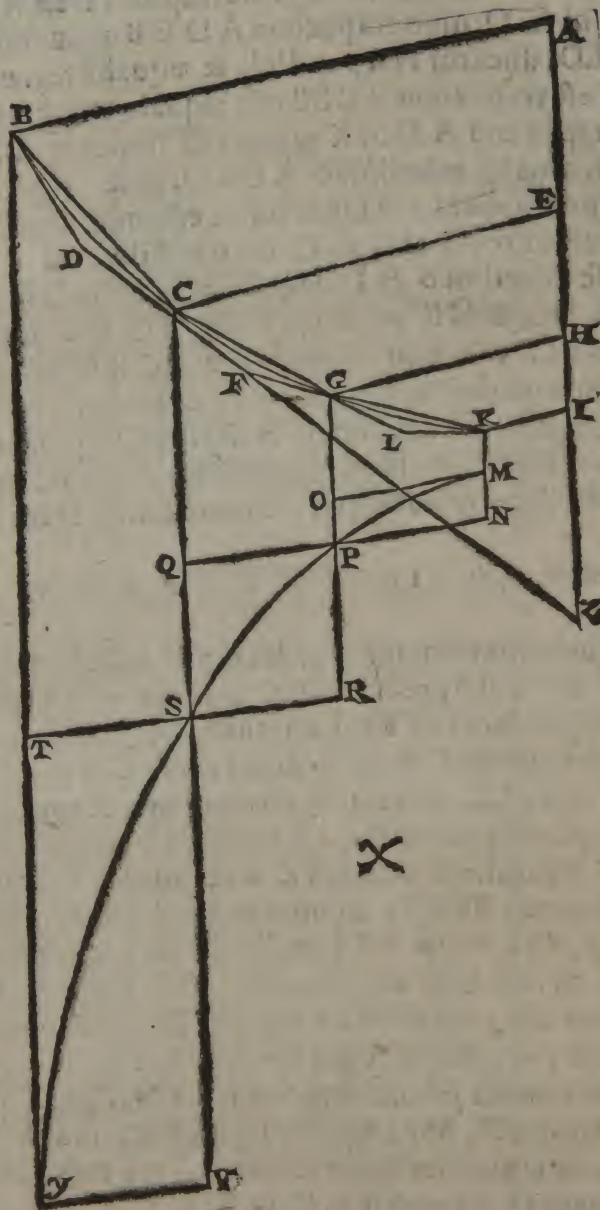
logramma ABGO, DENS, & producantur rectæ AO, NS, ut concurrant in Q. dico trapezium ADEB maius esse mixtilineo ADLO, ducatur HK parallela & æqualis rectæ AB; manifestum est trapezium ADEB esse æquale trapezio ADMK, item & trapezium ADMK maius esse trapezio ADLO, & ideo multo maius mixtilineo ADLO; patet ergo propositum nempe trapezium ADEB maius esse mixtilineo ADLO.

Producatur recta DG in C: dico rectilineum ABEDC minus esse mixtilineo ADSQ, ducatur recta CF parallela rectis AB, DE, & CR parallela rectis AQ, DS: patet trapezium ABFC esse æquale trapezio ACRQ & trapezium CFED esse æquale trapezio CDLI; & proinde rectilineum ABEDC æquale est rectilineo ACDLIRQ, quod minus est rectilineo ACDSQ, & ideo rectilineum ABEDC multo minus est mixtilineo ADSQ, quæ demonstranda erant.

PROP. II. THEOREMA.

Sit spatium mixtilineum quodcunque ABKI comprehensum à curva BK, recta AI & duabus rectis parallelis BA, KI; sitque curva MY talis naturæ, ut (sumpto in curva BK quolibet puncto C & ex eo ducta recta CE parallela rectæ AB, & recta CZ curvam BK contingente terminata a recta AI, si opus est, producta in Z) recta EZ semper sit æqualis rectæ CS parallelæ rectæ AZ & terminata à curva YM. dico mixtilineum BKMY, comprehensum à curvis BK, MY, & rectis BY, KM, rectæ AZ parallelis, esse æquale mixtilineo BAIK. Si non sunt æqualia, sit eorum differentia X; & dividatur curvilineum BKMY à tot rectis CS, GP, KM, rectæ BY parallelis, ut (ductis rectis OM, QN, TR, YV, parallelis rectæ AB) omnia parallelogramma ON, QR, TV, simul minora sint quam X, hoc enim fieri potest ab indefinito parallelarum numero. ducantur subtendentes rectæ BC, CG, GK, & tangentes in punctis B, C, G, K, BD, DF, FL, LK: manifestum

D 2 **nifestum**



nifestum est ex præcedente trapezium $ABCE$ maius esse mixtilineo $BCST$ item & trapezium $CEHG$ maius esse mixtilineo $CGPQ$ & trapezium $GHIK$ maius esse mixtilineo $GKMO$, & ideo rectilineum $ABCGKI$ maius est mixtilineo $BKMOPQST$. patet quoque ex antecedente rectilineum $ABDCE$ minus esse mixtilineo $BCVY$ & rectilineum $ECFGH$ minus esse mixtilineo $CGRS$ & rectilineum $HGKI$ minus mixtilineo $GKNP$, & proinde rectilineum $ABDFLKI$ minus est mixtilineo $BKNPRSVY$: cum igitur mixtilineum $BAIK$ consistat inter rectilinea $ABCGKI$, $ABDFLKI$ & mixtilineum $BKMY$ consistat inter mixtilinea $KMOPQSTB$, $KNPRSVYB$, item rectilinea $ABCGKI$, $ABDFLKI$ consistent inter mixtilinea $BKMOPQST$, $BKNPRSVY$, manifestum est mixtilinea $ABKI$, $KMYB$, minore quantitate differre quam mixtilinea $BKMOPQST$, $KNPRSVYB$, sed horum differentia ex suppositione est minor quam X , & ideo differentia mixtilineorum $ABKI$, $BKMY$, est multo minor quam X , quod est absurdum, ponitur enim maior quam X ; nulla ergo est differentia inter mixtilinea $ABKI$, $BKMY$, & ideo æqualia sunt, quod erat demonstrandum. Eadem fere esset demonstratio in duabus præcedentibus, etiamsi convexitas curvæ BK esset versus rectam AI .

DEFINITIONES.

I.

SI fuerit figura $ABFE$ comprehensa à rectis parallelis AB , EF , recta AE parallelis normali & a BF linea quolibet, item figura GHK comprehensa a rectis GH , GK , (ita ut GH sit æqualis rectæ AB & GK rectæ EF) & linea HK , quæ etiam æqualis est lineæ BF , hac lege, ut, sumptis ad libitum lineis æqualibus BD , HI , iuncta recta GI fiat æqualis rectæ DC perpendiculari ad rectam AE : appello figuram GHK , figuram $ABFE$ involutam; & figuram $ABFE$, figuram GHK evolutam.

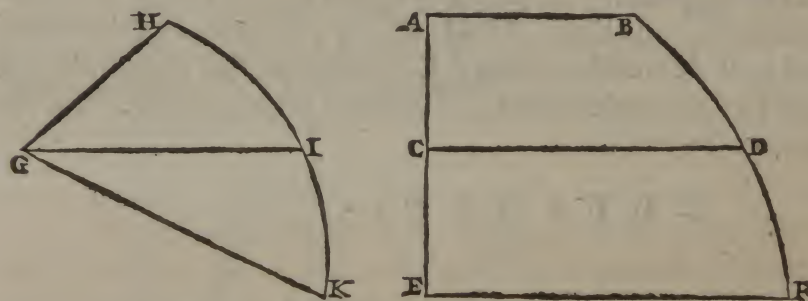
Appel-

Appello quoque puncta B, H, vel D, I, vel F, K, sibi mutuo relativa.

Punctum G appello centrum involutionis.

Angulum H G K voco angulum involutionis.

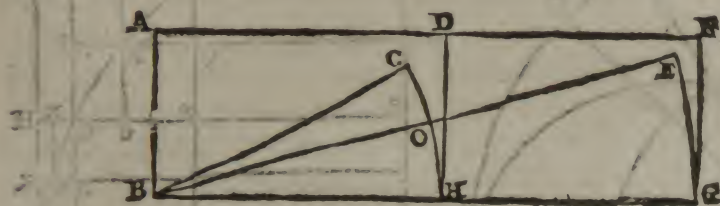
Appello rectam A E evolutæ figuræ axem, item quamlibet CD illi perpendicularem axi ordinatim applicatam.



PROP. 12. THEOREMA.

Sit rectangulum A F G B, quod involutum efficiat sectorem circuli B E G, item rectangulum A D H B, quod involutum efficiat sectorem B C H. dico angulum involutionis C B H maiorem esse angulo involutionis E B G. est enim ut
B G

BG ad BH ita arcus EG seu arcus CH ad arcum OH, sed BG maior est quam BH, & ideo CH maior est quam OH, & ideo angulus CBH maior est angulo EBG, quod erat demonstrandum.



PROP. 13. THEOREMA.

Sit figura ABMI, quæ involuta efficiat figuram NPX. sit ex centro involutionis N arcus circuli PT: dico arcum PT minorem esse recta AI, seu figuræ evolutæ axe. ducatur recta BK parallela & æqualis rectæ AI, sitque rectangulum ad libitum EGLI, ut figuræ ABMI inscribatur rectilineam ABFGLI, quod si involvatur, erit eius angulus involutionis minor angulo involutionis rectanguli ABKI involuti, hoc autem ita innotescit, rectilineum ABFGLI involutum idem est cum involuto rectangulo ABFE vna cum involuto rectangulo EGLI; & rectangulum ABKI involutum idem est cum priore involuto rectangulo ABFE vna cum involuto rectangulo EFKI, sed ex præcedente angulus involutionis rectanguli EGLI minor est angulo involutionis rectanguli EFKI, & proinde angulus involutionis rectilinei ABFGLI involuti minor est angulo involutionis rectanguli ABKI involuti: eodem prorsus modo (si ducantur rectæ QR, SV, parallelæ rectis AB, IM, & rectæ Rθ, VY, parallelæ axi AI, ut compleatur rectilineum ABQRθGSVYI) demonstrabitur eius angulus involutionis esse minor angulo involutio-
nis

gulo ADHE, sed ex precedente angulus involutionis re-
ctanguli ACE maior est angulo involutionis ADHE, &
proinde angulus involutionis rectilinei ACGHMI inuoluti
maior est angulo involutionis rectanguli ADMI: eodem
prorsus modo (si ducantur rectæ $R\beta$, VZ , parallele rectis
 AB , IM , & rectæ $R\alpha$, VX , parallele axi AI , ut compleatur
rectilineum $A\alpha R\beta GXVZMI$) demonstrabitur eius angu-
lus involutionis esse maior angulo involutionis rectilinei
ACGHMI, & proinde multo maior erit angulo involutionis
rectanguli ADMI nempe δNX , supponimus enim sectorem
 δNX esse rectangulum ADMI inuolutum: denique eodem sem-
per modo demonstratur, quod, quo minus differt rectilineum
circumscriptum à figura ABMI, eo semper maior sit excessus
anguli involutionis rectilinei supra angulum δNX , & ideo
multo excedit angulus involutionis ipsius figura PNX angu-
lum δNX , & proinde figuræ evolutæ axis AI seu arcus δX
multo minor est arcu OX , quod demonstrare oportuit.

PROP. 14. PROBLEMA.

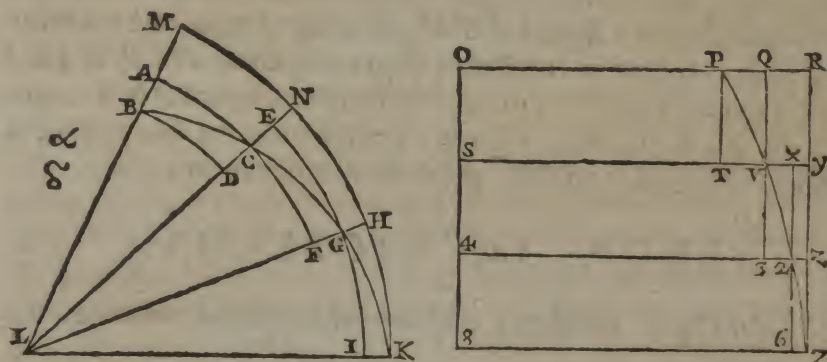
Ex data figura involuta, eiusdem evolutæ axem invenire.

Sit figura involuta LBK , cuius evolutæ oportet invenire
axem. Centro L sit circuli arcus MK ; sitque figura $OP78$
contenta rectis parallelis OP , 87 , rectaque $O8$ illas norma-
liter secante & linea $P7$ talis naturæ, ut (in involuta sumpta
qualibet recta LC producta in N , item in figura $OP78$ du-
cta recta SV rectæ $O8$ perpendiculari & eam secante in ra-
tione MN ad NK) 87 sit ad SV ut LK ad LC . dico rectangulum
circumscriptum $OR78$ esse ad figuram $OP78$ ut arcus MK ad
axem figuræ LBK evolutæ: si non sit ita, sit vt $OR78$ ad OP
 78 ita MK ad α , quæ differat ab axe figuræ LBK evolutæ quâ-
ritate δ : deinde e centro L circumscribantur figuræ involu-
tæ LBK similes arcus circulares AC , EG , HK , & eidem in-
scri-

E

scri-

scribantur totidem similes arcus circulares BD , CF , GI , ut differentia inter arcus inscriptos & circumscriptos sit minor quam δ ; deinde diuidatur recta $O8$ in tot partes equales $O S$, $S4$, 48 , in quot diuiditur arcus MK a rectis LC , LG , productis, ducanturque ipsi $O8$ perpendiculares rectæ SY , $4Z$, lineam $P7$ secantes in punctis V , 2 , & iungantur rectæ OS parallelæ PT , QV , $X26$. manifestum est ex figuræ $OP78$ descriptione SY esse ad SV ut LN ad LC seu ut arcus MN ad arcum AC ; & ideo ut rectangulum OY ad rectangulum OV ita arcus MN ad arcum AC ; eodem modo probatur, ut re-



ctangulum SZ ad rectangulum $S2$ ita arcus NH seu arcus MN ad arcum EG , & ut rectangulum 47 ad rectangulum 47 ita arcus HK ad arcum HK , cumque omnes primæ inter se & omnes terciæ inter se sint equales, erit ut omnes primæ nempe rectangulum $O7$ ad omnes secundas nempe rectiligneum $OQVX2Z78$ ita omnes terciæ nempe arcus MK ad omnes quartas nempe arcus AC , EG , HK ; est autem ut $O7$ ad figuram $OP78$ ita MK ad α , at rectiligneum $OQVX2Z78$ maius est quam figura $OP78$, & ideo arcus AC , EG , HK , simul sunt maiores quam α ; sed arcus AC , EG , HK , maiores etiam

etiā sunt quam axis figuræ LKB euolutæ, quod sic probo, axis totius figuræ LKB euolutæ est æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente axis figuræ LBC euolutæ minor est arcu AC, & axis figuræ CLG euolutæ minor arcu EG, item axis figuræ GLK euolutæ minor arcu HK, & igitur axes omnium figurarum partialium simul seu axis figuræ LKB euolutæ minor erit omnibus arcubus AC, EG, HK, simul. Deinde ex descriptione figuræ OP 78, vt OR ad OP seu vt OY ad OT ita LM ad LB vel MN ad BD, eodemque modo demonstratur, vt SZ ad S₃ ita NH ad CF, & 47 ad 46 ita HK ad GI, cumque primæ inter se & tertiæ inter se semper sint æquales, erit vt omnes primæ nempe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV₃₂₆₈ ita omnes tertiæ nempe MK ad omnes quartas nempe arcus BD, CF, GI; cumque sit vt O7 ad figuram OP78 ita MK ad α , & rectilineum OPTV₃₂₆₈ sit minus quam figura OP78, erūt omnes arcus BD, CF, GI, simul minores quam α , sed arcus BD, CF, GI, minores etiam sunt quam axis figuræ LKB euolutæ, quod sic probo, axis totius figuræ LKB euolutæ est æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente, axis figuræ LBC euolutæ maior est arcu BD, & axis figuræ CLG euolutæ maior arcu CF & axis figuræ GLK maior arcu GI, & igitur axis omnium figurarum partialiū simul seu axis figuræ LKB euolutæ maior est omnibus arcubus BD, CF, GI, simul; euident igitur est quatuor esse magnitudines, nempe prima omnes arcus BD, CF, GI, simul, secunda axis figuræ LKB euolutæ, tertia α , quarta omnes arcus AC, EG, HK, simul, quarum maxima & minima sunt, omnes arcus AC, EG, HK, simul, & omnes arcus BD, CF, GI, simul, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe axis figuræ LKB euolutæ & quantitatis α , quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter α & axem figuræ LKB euolutæ, & ideo æquales sunt, quod demonstrare oportuit.

E 2 CON-

Hinc manifestum est ex data figura inuoluta inueniri posse eandem euolutam, nam ex hac datur figurę inuolutę LBK vel eius cuiuslibet partis BLC (dum euoluitur) axis, danturque ordinatim applicatę, quoniam sunt eadem cum rectis inter centrum inuolutionis L & puncta sua relativa in figura euoluta LBK.

PROP. 15 PROBLEMA.

*In antecedente figura oportet inuenire rationem inter sectorem
MLK & figuram BLK.*

Sit figura OP78 contenta rectis parallelis OP, 87, rectaque O8 illas normaliter secante & linea P7 talis nature, vt (in inuoluta sumpta qualibet recta LC producta in N, ite in figura OP78 ducta recta SV rectę O8 perpendiculari & eam secante in ratione MN ad NK) 87 sit ad SV in duplicata ratione rectę LK ad LC: dico rectangulum circumscriptum OR78 esse ad figuram OP78, vt sector LMK ad inuolutam LBK. Si non sit ita, sit vt OR78 ad OP78 ita MLK ad α , quę differat ab inuoluta BLK quantitate δ : deinde circumscribantur figurę inuolutę BLK similes sectores circulares LAC, LEG, LHK, & eidem inscribantur totidem similes sectores circulares LBD, LCF, LGI, vt differentia inter mixtilineum inscriptum LBDCFGI & circūscriptum LACEGHK sit minor quam δ : deinde diuidatur O8 in tot partes æquales OS, S4, 48, in quot diuiditur arcus MK a rectis LC, LG, productis, ducanturque ipsi O8 perpendiculares rectę SY, 4 Z, lineam P7 secantes in punctis, V, 2, & iungantur rectę OS parallelę PT, QV3, X26: manifestum est ex figurę OP78 descriptione SY esse ad SV seu OY ad OV in duplicata ratione LN ad LC seu vt sector LMN ad sectorem LAC; eodem

mo

modo probatur SZ esse ad S₂ vt LNH ad LEG, & 47 ad 47
 vt LHK ad LHK, cumque omnes primæ inter se & omnes ter-
 tiæ inter se sint æquales, erit vt omnes primæ nempe rectan-
 gulum O7 ad omnes secundas nempe rectilineum O QV X₂
 Z78 ita omnes tertiæ nempe sector MLK ad omnes quartas
 nempe mixtilineum LACEGHK, est autem vt O7 ad figuram
 OP78 ita sector MLK ad α , at rectilineum OQVX₂Z78 maius
 est quam figura OP78, & ideo mixtilineum LACEGHK
 maius est quam α . Deinde ex descriptione figuræ OP78, OR
 est ad OP vel OY ad OT in duplicata ratione LM ad LB vel
 vt MLN ad BLD, eodemque modo probatur, SZ ad S₃ vt NL
 Had CLF, & 47 ad 46 vt HLK ad GLI; cumque primæ inter
 se & tertiæ inter se semper sint æquales, erit vt omnes primæ
 nempe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV 32
 68 ita omnes tertiæ nempe MLK ad omnes quartas nempe
 mixtilineum LBDCFGI, at rectilineum OPTV 3268 minus
 est quam figura OP78, & ideo mixtilineum LBDCFGI mi-
 nus est quam α ; euidens igitur est quatuor esse magnitudi-
 nes, nempe prima mixtilineum LBDCFGI, secunda, inuo-
 luta LBK, tertia α , quarta mixtilineum LACEGHK, quarum
 maxima & minima sunt mixtilinea LACEGHK, LBDCFGI,
 harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum
 reliquarum nempe α & inuolutæ LBK, quod est absurdum,
 ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter α & in-
 uolutam BLK, sunt ergo æquales, quod demonstrare oportet.

P R O P. 16. T H E O R E M A.

Omnis figura evoluta est eiusdem inuoluta dupla.

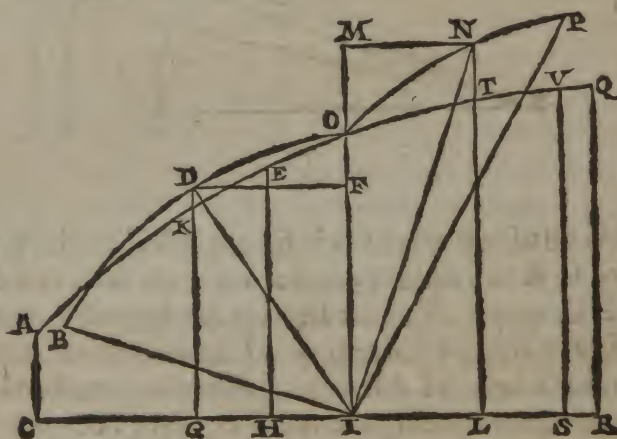
S It figura inuoluta LBK, quæ evoluta efficiat figuram OP
 78: dico figuram OP78 duplam esse figuræ LBK: si ita
 non sit, fiat evoluta OP78 dupla quantitatis α , quæ
 differat ab inuoluta LBK quantitate δ ; inscribatur inuolutæ
 LBK

¹³ hu
^{ius.} L BK mixtilineum LBDCFGI & eidem circumscribatur mix-
 tilineum LACEGHK vt eorum differentia sit minor quam δ ;
 sintque punctis B, C, G, K, evolutæ puncta relatiua P, V, 2,
 7, & compleantur rectangula OV, OT, S₂, S₃, 47, 46. recta
 LC est æqualis rectæ SV & curua AC est maior recta QV, &
 ideo sector circularis LAC maior est dimidio rectanguli OV,
 eodem modo probatur sectorē circulem LGE maiorē ef-
 se dimidio rectanguli S₂ & sectorem circulem LHK maio-
¹³ hu
^{ius.} rem esse dimidio rectanguli 47, & ideo mixtilineum LACE
 GHK maius esse dimidio OQVX₂Z₇8, & proinde multo ma-
 ius quam dimidium evolutæ OP 7 8 nempe α . deinde recta
 OP est æqualis rectæ LB & curva BD minor recta PT, & ideo
 sector circularis LBD minor est dimidio rectanguli OT, eo-
 demque modo demonstratur sectorem LCF minorem esse
 dimidio rectanguli S₃ & sectorem LGI minorem esse dimi-
 dio rectanguli 46, & ideo mixtilineum LBDCFGI minus est
 dimidio rectilinei OPTV₃ 2 6 8, & proinde multo minus
 quam dimidium evolutæ nempe α : evidens igitur est quatuor
 esse quantitates, nempe prima mixtilineum LBDCFGI,
 secunda, involuta L BK, tertia α , quarta mixtilineum LACE
 GHK, quarum maxima & minima sunt mixtilinea LACE G
 HK, LBDCFGI, harum ergo differentia maior erit quam
 differentia duarum reliquarum nempe α & involutæ L BK,
 quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est dif-
 ferentia inter α & involutam L BK, sunt ergo æquales, quod
 demonstrare oportuit.

P R O P. 17. T H E O R E M A.

S It figura involuta ABG; producatu recta AG & in eam
 sit perpendicularis recta BK, quæ tota cadat extra cur-
 vam BG: dico rectam BK non esse minorem quam axis
 figuræ ABG evolutæ: sit si fieri potest minor præd. cto axe,
 sitque axis figuræ ABC evolutæ minor quam excessus axis
 figuræ

Sit figura euoluta $ACRQ$, in qua sit ordinatim applicata ad libitum OI . deinde manente recta OI inuoluitur figura $ACRQ$ in figuram inuolutam $I BOP$: dico lineam BOP cadere inter lineam AOQ & eius axem CR , item lineas AOQ , BOP , se inuicem tangere in puncto O . si fieri potest, cadat linea OP extra lineam OQ in puncto N : suppono curuam OQ (quo propius ad Q) eo longius distare ab axe IR , & igitur NM perpendicularis recta in rectam IO productam cadit extra curuam ON , & proinde recta NM (ex antecedente) non est minor quam axis figure ION euolute. Sit in euoluta ordinatim applicata VS equalis recte IN ; manifestum



est figuram OVS esse ION euolutam, atque IN seu SV est maior quam LT , & ideo SI est maior quam IL , nempe axis figure ION euolute maior quam MN , quod est absurdum, & proinde OP non cadit extra OQ : eodem modo probatur OP non coincidere cum OQ , cadit ergo intra, quod demonstrare oportuit. Se.

Secundo, si fieri potest, cadat linea OB extra lineam OA in puncto D ; suppono curuam OA (quo propius ad A) eo minus distare ab axe CI ; cadat DF perpendicularis in rectam OI non productam intra curuam DO , & ideo DF est minor axe figure IDO euolute; sit in euoluta ordinatim applicata E Hęqualis rectę DI ; manifestum est figuram $OEHI$ esse IOD euolutam, atque ID seu HE maior est quam recta KG , & ideo GI est maior quam HI , nempe DF maior quam axis figure IDO euolute, quod est absurdum ex huius antecedente, & proinde BO non cadit extra AO : eodem modo probatur OB non coincidere cum OA , cadit ergo intra, quod demonstrare oportuit.

Quod si perpendicularis DF cadat in IO productam, non potest IOB esse figura $IOAC$ inuoluta, quoniam ID maior erit quam vlla ordinatim applicata in figura $IOAC$.

CONSECTARIVM.

Quoniam figure $CAOQR$, $IBOP$, se mutuo tangunt in puncto O , manifestum est rectam, vnam ex his figuris tangentem in puncto O , alteram etiam in eodem puncto tangere; atque hinc evidens est methodus ducendi rectam, quę inuolutam in dato puncto tangat, si modo detur methodus ducendi rectam, quę euolutam in dato puncto contingat, & e contra; recta enim tangens euolutam eodem inclinatur angulo ad ordinatim applicatam, quo tangens inuolutam inclinatur ad eandem ordinatim applicatam in centrum inuolutionis cum reliquis concurrentem.

Omnia prædicta de figurarum inuolutione eodem modo demonstrantur, quando euolute curua est conuexa versus axem, etiamsi in nostris figuris euolute curua sit versus axem concava.

F

PROP.

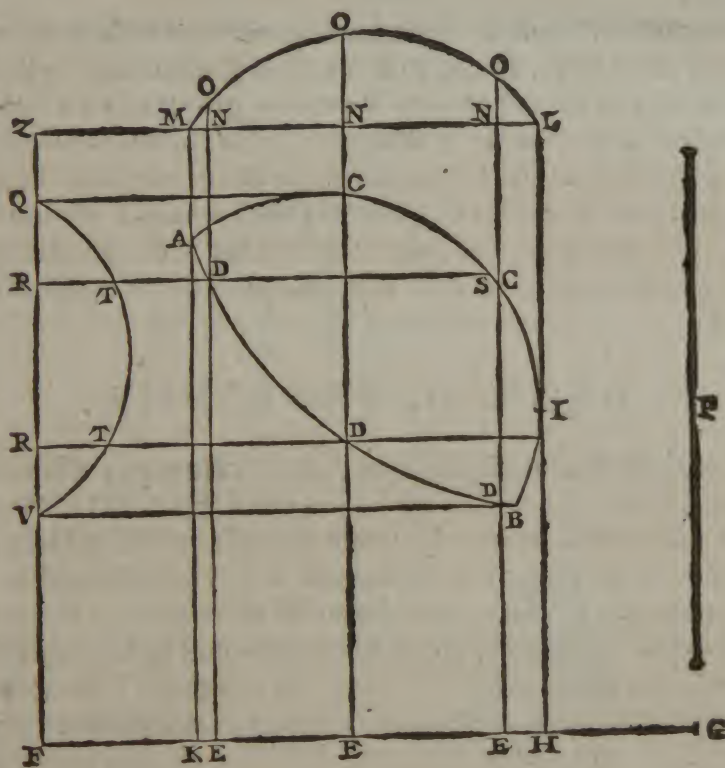
Sit figura quęcunque AB super qua imaginetur cylindricus rectus sectus a plano transeunte per rectam FG & planum baseos AB seminormaliter secante. sit recta ML rectę FG parallela, sitque super recta ML mixtilineum MOLN talis naturę, vt (ducta recta quacunque EDCNO rectę FG normali & figuras AB, LOMN, secante in punctis D, C, N, O) recta assignata P sit ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO. Dico cylindricum rectum cuius basis MOLN & altitudo recta P esse æqualem inferiori trunco cylindrici super AB secti vt supra dictum est. Quoniam enim P est ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO, igitur rectangulum P in NO æquale est trapezio a rectis DC, CE, DE, rectangulo ad D & C, sed tale trapezium est communis sectio plani super recta EO ad basem AB recti cum trunco inferiore cylindrici; cumque hoc semper fiat vbicunque ducatur recta EDCNO, manifestum est ex doctrina ductum Gregorii à S. Vincentio cylindricum rectum cuius basis MOLN & altitudo P æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super MOLN secti vt supra dictum est, quod demonstrare oportuit.

Hinc quoque patet cylindricum cuius basis MOLN & altitudo P esse magnitudine & grauitate analogum dicto trunco; cumque cylindricus sit suę basi analogus, patet etiam truncum esse eidem basi magnitudine & grauitate analogū.

PROP. 20. THEOREMA.

Eisdem positis quę in antecedente, sit recta FZ rectę FG normalis, super qua sit mixtilineum QTVR talis naturę, vt (ducta recta quacunque RTDS rectę FR normali & figuras QTVR, AB, intersecante in punctis T, D, S) recta assignata P sit ad DS, vt recta RF ad rectam RT. dico cylindricum

cum rectum cuius basis QTVR & altitudo P esse æqualem in-
feriori trunco cylindrici super AB secti ut supra dictum est,
nempe per planum in recta FG transiens & basem AB semi-
normaliter secans. Quoniam P est ad DS ut RF ad RT, erit
rectangulum P in R T æquale rectangulo R F in D S, sed re-
ctangulum R F in D S est communis intersectio trunci infe-



rioris cylindrici cum plano super recta RS plano baseos AB
normali, & ideo rectangulum P in R T eidem communi se-
ctioni est æquale, cumque hoc semper fiat ubicunque ducatur
recta RS, manifestum est ex doctrina ductuum Gregorii

F 2 a S.

a S. Vincentio cylindricum rectum cuius basis QTVR & altitudo P æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super AB secti ut dictum est supra, quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam evidens est cylindricum cuius basis QT VR & altitudo P esse magnitudinis & gravitatis analogum dicto trunco cylindrici recti, & proinde basis quoque cylindrici recti QTVR eidem trunco est analogia magnitudinis & gravitatis.

Supposito omnium figurarum quadraturas & centra gravitatis data esse, facile erit omnium truncorum cylindrici cuiuslibet recti cubaturas & centra gravitatis ex hac propositione & præcedente inuenire, vel e contra: eodem modo ex huius secunda tertia & quarta datis omnium figurarum quadraturis & gravitatis centrīs non difficile est inuenire superficiē cuiuscunque trunci cylindrici recti quadraturam & gravitatis centrum vel e contra, quod hic admonuisse sufficiat.

PROP. 21. PROBLEMA.

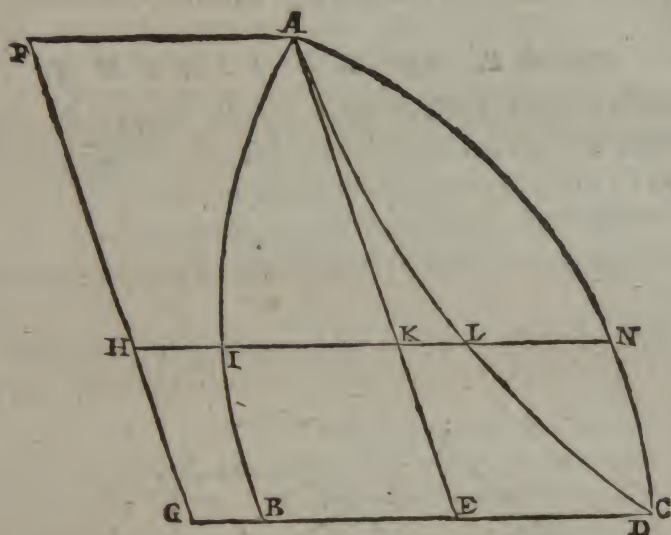
SIt solidum rotundum quodlibet sectum per diametrum AD plano normali ad basem circulem BOCN a diametro BC, & intersectione cum plano efficiens figuram ABC: secetur solidum rotundum ABC ab alio plano quomodocunque FNGO ad planum AB normali, ita ut communis solidi & plani intersectio fiat figura FNGO, cuius intersectio cum plano ABC est recta FG: ducatur FK rectæ BC parallela & rectæ AD occurrens in I. concipiatur solidum rotundum, diametrum habens FG, ex circulis conflatum, quorum radii sunt omnes perpendiculares ex recta FG in curuam FO, ita ut diameter figuræ FG per centra infinitorum illorum circularum transiens, ad illos omnes inclinet in angulo æquali ipsi FGB. ex datis, solido ABC & punctis F, G, oportet etiam exhibere mensuram solidi illius rotundi, quod

auferatur quadruplum conorum ad verticem datorum FEI, DEG; relinquetur solidum quæsitum rotundum FOGN. Si vero daretur centrum grauitatis solidi rotundi ABC & centrum ablati AFK; daretur etiam centrum grauitatis portionis FKCB, quo dato vna cum centro grauitatis conorum abstrahendorum, datur etiam centrum grauitatis portionis excauatæ, quæ cum solido rotundo FOGN est proportionaliter analogæ, vt liquet ex demonstratione; ergo datur etiam centrum grauitatis solidi rotundi FOG. Sunt etiam alii huius propositionis casus, sed hoc intellecto in reliquis nulla restat difficultas.

PROP. 22. PROBLEMA.

SIt solidum rotundum sectum per diametrum AE, plano normali ad basem circularem a diametro BC, & intersectione cum plano efficiens figuram BAC. Sit FAEG parallelogramum, & describatur linea ALD eius naturæ, vt ducta recta HL vtcunque basi BC parallella, rectæ HK, IK, KL, sint continue proportionales. ex data solidi rotundi ABC ad cylindrum datum ratione, oportet figuræ ALDEK quadraturam inuenire. ducatur recta vtcunque HIKLN: quadratum a latere IK, hoc est rectangulum HKL est quarta pars quadrati ex IN; & ideo rectangulum HKL est ad circulum ex diametro IN in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; sed punctum K sumptum est arbitrariè; & proinde cylindricus rectus ex base ALDEK in altitudinem HK est ad solidum rotundum ABC in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; & ideo quadruplum cylindrici prædicti est ad solidum rotundum ABC, vt quadratum diametri ad circulum, hoc est, vt parallellipipedum rectangulum ad cylindrum eiusdem altitudinis sibi inscriptum, & permutando, quadruplum cylindrici est ad parallellipipedum

pedum ut solidum rotundum ad cylindrum; & proinde datur ratio quadrupli cylindrici ad parallellipedum, & ideo datur cylindrici cubatura, & baseos ALDEK quadratura.



Ex demonstratione etiam manifestum est solidum rotundum ABC esse figuræ ALDEK analogum tam in magnitudine quam in gravitate, quoniam eadem quæ demonstrantur de totis, eodem modo demonstrari possunt de partibus eorum proportionalibus; & igitur centrum gravitatis solidi rotundi est centrum æquilibrii figuræ.

Hinc etiam manifestum est cylindricum cuius basis AKED L & altitudo HK duplum esse trunci cylindrici recti cuius basis ALBE secti a plano in angulo semirecto inclinante, & per rectam AE baseos planum secante; hoc autem trunco dato, datur quilibet alius truncus per eandem rectam AE abscissus, quoniam tales trunci inter se sunt ut altitudines, vel ut cli-

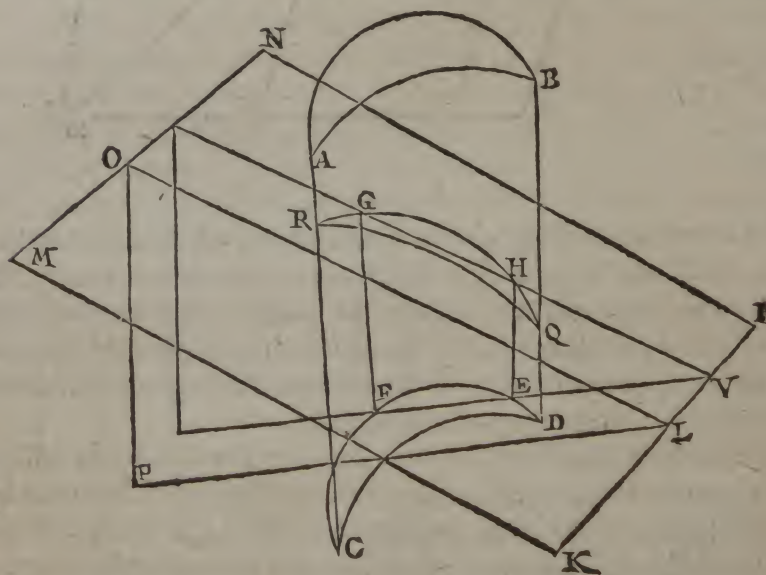
inclinationum tangentes, quod facile est demonstratu.

Nulla quoque negotio demonstratur huius problematis conuersum, nempe ex datis figuræ alicuius quadratura & grauitatis centro; solidi alicuius rotundi ad cylindrum datū proportionem, & eius centrum grauitatis, inuenire.

P R O P. 23. T H E O R E M A.

Si cylindricus rectus existens super qualibet figura, secetur plano; quilibet truncus huius cylindrici erit ad solidum rotundum ortum ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, ut altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis.

Sit cylindricus rectus $ABDC$ super figura quacunque DC , qui secetur plano quocunque $KINM$, ita ut commu;



nis intersectio plani cum cylindrico fiat figura $RGHQ$. producat^{ur} planum secans donec baseos DC planum secet in recta

recta KI , & planum AB in recta MN : & a puncto quolibet
 rectę IK nempe L , ducatur eidem IK perpendiculare planū
 OLP , secans plana $IKMN$, DFC , normaliter in rectis OL , L
 P ; sitque perpendicularis in LP recta OP . Supponimus hic K
 I esse axem rotationis; & rectam PL illi normalem, appella-
 mus radium rotationis. dico truncum cylindrici $RQDC$ esse
 ad solidum rotundum ortum ex rotatione figurę $DEFC$ cir-
 ca IK axem rotationis, vt OP altitudo cylindrici ad circum-
 ferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis
 LP . per basem $DEFC$ ducatur vbilibet recta EF , a baseos
 circumferentia vtrinque terminata in E & F , quę producta,
 axi rotationis normaliter incidat in puncto V : a punctis E, F ,
 excitentur perpendiculares baseos plano EH , FG , a plano
 secante terminatę in H & G , quę necessario sunt in superfi-
 cie trunci ob cylindricum rectum, ducaturque VH recta,
 quę necessario existit in $IKMN$ plano secante: manifestum
 est triangula OLP , HEV , rectangula ad P & E (cum habeāt
 angulos OLP , HEV , æquales inclinationi plani secantis IK
 MN) esse similia; & ducta recta GV , ob eandem rationem
 similia sunt triangula HEV , GFV , cumque GF sit parallela
 rectę HE , & EF in directum EV ; coincident rectę GV , HV ,
 in vnā rectam plani $IKMN$, eritque $GHEF$ communis in-
 terfectio plani GFV , plano OPL parallelli, cum trunco cy-
 lindrici $RQDC$: patet ergo OP ad PL esse, vt HE ad EV ; &
 ideo vt OP ad circumferentiam circuli cuius semidiameter P
 L , ita HE ad circumferentiam circuli cuius semidiameter E
 V ; & vt OP ad circumferentiam circuli cuius semidiameter
 PL , ita (reliquos terminos in eandem altitudinem, nempe
 semissem rectę EV , ducendo) triangulum HEV ad circu-
 lum cuius semidiameter EV : eodem modo demonstratur
 esse, vt OP ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter
 PL , ita triangulum GFV ad circumulum, cuius semidiameter F
 V : est igitur totum triangulum GFV ad totum circumulum
 cuius semidiameter FV , ita ablatum triangulum HEV ad
 G abla.

ablatum circulum cuius semidiameter EV ; & proinde in eadem ratione erit relictum trapezium $GFEH$ ad relictam armillam circulearem genitam ex reuolutione rectæ FE circa axem rotationis IK , nempe in ratione OP ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter LP ; atque hæc proportio eodem modo demonstratur de omnibus rectis ductis in base $DEFC$, quæ (si opus est) productæ, in axem rotationis IK normaliter incidunt; atque ex omnibus istis rectis conflatur ipsa basis DC ; ex omnibus trapeziis super istis rectis descriptis conflatur truncus $RQDC$, & ex omnibus armillis ab istarum rectarum reuolutione genitis, conflatur solidum rotundum genitum a reuolutione baseos circa axem rotationis IK ; & proinde ut vna antecedentium ad vnâ consequentium, nimirum OP altitudo cylindri ad circumferentiam circuli cuius semidiameter PL radius nempe rotationis, ita omnes antecedentes, nimirum omnia trapezia, hoc est, truncus $RQDC$, ad omnes consequentes, nempe omnes armillas circulares, hoc est, solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem IK , quod demonstrare oportuit.

Hoc theorema eodem modo demonstratur de trunco superiore, si figura AB concipiatur rotari circa rectam MN .

Patet ex demonstratione truncum $RQDC$ & solidum rotundum ortum ex reuolutione baseos DC circa axem rotationis IK , esse quantitates magnitudine & grauitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demonstratur inter integras, eodem modo demonstratur de earum partibus proportionalibus.

In sequentibus notandum (quando loquimur de superficie cylindrici vel trunci) nos intelligere solam superficiem sine basibus; hoc est nunquam consideramus figuras quæ sunt cylindrici bases, nec communem sectionem plani cylindricum secantis.

PROP.

Eisdem positis, quæ in antecedente; superficies trunci erit ad superficiem solidi rotundi orti ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, ut altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis.

Figura & præparatio sint eadem sicut in antecedente, dico superficiem trunci $RQDC$ esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ $DEFC$ circa IK axem rotationis, ut OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis LP . in antecedente demonstratum est OP esse ad circumferentiam circuli cuius semidiameter PL , ut HE ad circumferentiam circuli cuius semidiameter EV : atque hæc proportio eodem modo demonstratur de omnibus rectis in superficie trunci $RQDC$ ad basem $BEFC$ perpendicularibus, ad omnes circumferentias circulorum ab earum punctis infimis in circumrotatione descriptas; atque ex omnibus illis rectis conflatur ipsa superficies trunci, & ex omnibus circumferentiis circulorum ab infimis rectarum punctis seu a baseos ambitu descriptis, conflatur superficies solidi rotundi orti ex rotatione baseos circa axem IK ; & ideo ut una antecedentium ad unam consequentium, nempe OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est LP radius rotationis, ita omnes antecedentes, hoc est, superficies trunci $RQDC$, ad omnes consequentes, hoc est, superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos $DEFC$ circa axem rotationis IK , quod erat demonstrandum. Hoc etiam theorema demonstratur eodem modo de trunco superiore si figura AB concipiatur rotari circa rectam MN .

Patet ex demonstratione superficiem trunci $RQDC$ & superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos $DEFC$

G 2 circa

circa axem rotationis IK, esse quantitates magnitudine & grauitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demonstratur esse inter totas, eodem modo demonstratur esse inter partes earum proportionales.

P R O P. 25. T H E O R E M A.

Eisdem positis, supponendo angulum inclinationis, Plani secantis cum base cylindrici (si opus est) producta, esse semirectum; Dico quadratum semidiametri circuli æqualis superficiei solidi rotundi duplum esse superficiei trunci.

ESt enim ex præcedente, vt altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi: in hoc autem casu, quando angulus inclinationis est semirectus, altitudo cylindrici est æqualis radio rotationis; & ideo in nostro casu, vt semidiameter ad sui circumferentiam, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; vt autem semidiameter ad circumferentiam ita semissis quadrati semidiametri ad circulum; & ideo vt semissis quadrati semidiametri ad circulum, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; & conuertendo & permutando, circulus est ad superficiem solidi rotundi vt semissis quadrati semidiametri ad superficiem trunci; sed circulus supponitur æqualis superficiei solidi rotundi; & igitur semissis quadrati semidiametri illius circuli æqualis est superficiei trunci; & ideo quadratum semidiametri est duplum superficiei trunci, quod demonstrandum erat.

Dux præcedentes propositiones eodem prorsus modo demonstrantur de superficiebus rotundis genitis ex rotatione vnus vel plurium linearum quarumcunque siue rectarum, curuarum vel mixtarum, figuram non claudentium; semper enim ad superficies cylindrici recti super linea vel lineis

neis a plano resectas, superficies rotundæ ex lineæ vel linea-
rum rotatione genitæ prædictas habent rationes.

PROP. 26. THEOREMA.

*Eisdem positis qua in antecedente; Dico cubum semidiametri sphæ-
ræ æqualis solido rotundo esse ad truncum ut tria ad duo.*

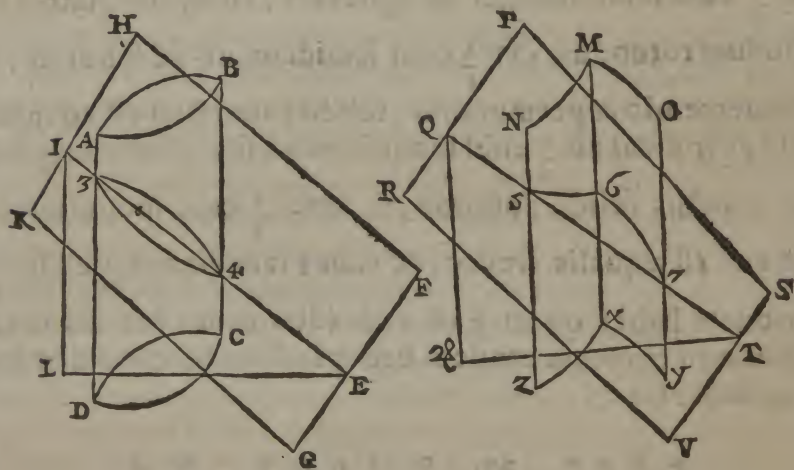
Est enim (in hoc casu) truncus ad solidum rotundum ut
semidiameter ad sui circumferentiam, hoc est, ut du-
plum quadrati semidiametri ad quadruplum circuli, hoc est,
ut $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri ad sphæram; est igitur truncus ad
solidum rotundum, ut $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri ad sphæram; &
conuertendo & permutando, solidum rotundum est ad sphæ-
ram ut truncus ad $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri; sed sphæra supponi-
tur æqualis solido rotundo; & ideo $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri
sphære est æqualis trunco, at cubus semidiametri ad sui $\frac{2}{3}$
rationem habet quam 3 ad 2; & ideo cubus semidiametri
sphære ad truncum eandem habet rationem, quod demon-
strandum erat.

PROP. 27. THEOREMA.

*Si duo cylindrici recti quicunque æqualiti, secantur a planis qui-
buscunque, unusquisque in duos trunco; proportio, solidi rotun-
di orti ex rotatione baseos cylindrici circa communem baseos (si
opus est) producta cum Plano secante intersectionem, ad solidum
rotundum ortum ex simili alterius cylindrici baseos rotatione, est
composita ex directâ proportionem radiorum rotationis & directâ
proportionem truncorum cylindrici inferiorum.*

Sic

Sint duo cylindrici recti æquialti $ABCD$, $NMOYXZ$, basi-
 libus DC , XYZ , insistentes, a planis intersecti, unus-
 quisque in duos truncos; nempe cylindricus $ABCD$ sit in-
 terfectus a plano $KHFG$ in truncos AB 43, 43 DC , & cylin-
 dricus $NMOYXZ$ a plano $PSVR$ in truncos NMO 76 5, 76 5
 ZXY . Sint plani $HFGK$ cum basium planis cylindrici paral-
 lellarum (si opus est) productis, DC , OB , intersectiones,
 rectæ KH , GF ; sintque plani $PSVR$ cum planis basium cylin-
 drici parallelarum NMO , ZXY , (si opus est) productis, in-



tersectiones, rectæ RP , VS . Sintque plana rectis FG , SV ,
 normalia, quæ plana secantia intersectant in rectis LE , QT , &
 plana basium DC , ZXY , (si opus est) producta in rectis LE ,
 & T ; sintque anguli ILE , $Q\&T$, recti. Manifestum est ex hu-
 jus 23, positis $HFGK$, $PSVR$, planis secantibus & GF , VS ,
 rotationis axibus, LE , & T , esse rotationis radios. Dico igitur
 solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa
 GF , esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ Z
 XY

XY circa VS, in ratione composita ex proportionem trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ & ex proportionem radii rotationis LE ad radium rotationis T. Ratio solidi rotundi orti ex figura DC ad solidum ortum ex figura ZXY, est composita, ex ratione solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, & ex ratione trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex ZXY ortum; sed ratio solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD est æqualis rationi circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici: & ratio trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex YXZ ortum est æqualis rationi Q²⁷ seu IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T²⁷ descripti; & proinde ratio solidi rotundi orti ex DC ad solidum rotundum ortum ex ZXY est composita, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T²⁷ descripti; sed hæ duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T²⁷ descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T²⁷: & proinde solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita ex proportionem trunci inferioris 34 CD ad truncum inferiorem 567 YXZ, & ex proportionem radii rotationis EL ad radium rotationis T²⁷, quod demonstrandum erat.

P R O P. 28. T H E O R E M A.

Eisdem positis quæ in antecedente; Proportio superficiei solidi rotundi orti ex rotatione baseos cylindrici circa communem baseos (si opus est) producta cum plano secante intersectionem, ad superficiem

ciem solidi rotundi orti ex simili alterius cylindrici baseos rotatione, est composita ex directa proportione radiorum rotationis & directa proportione superficierum truncorum inferiorum.

Figura & preparatio sint eadem sicut in antecedente. Dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa GF esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ ZXY circa VS in ratione composita ex proportione superficierum trunci 34 CD ad superficiem trunci 567 YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis T. Ratio superficierum solidi rotundi orti ex figura DC ad superficiem solidi rotundi orti ex figura ZXY est composita, ex ratione superficierum solidi rotundi ex DC orti ad superficiem trunci 34 CD, ex ratione superficierum trunci 34 CD ad superficiem trunci 567 YXZ, & ex ratione superficierum trunci 567 YXZ ad superficiem solidi rotundi ex ZXY orti; sed ratio superficierum solidi rotundi ex DC orti ad superficiem trunci 34 CD est æqualis rationi circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici; & ratio superficierum trunci 567 YXZ ad superficiem solidi rotundi ex YXZ orti est æqualis rationi Q& seu IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; & proinde ratio, superficierum solidi rotundi orti ex DC ad superficiem solidi rotundi orti ex ZXY, est composita ex ratione superficierum trunci 34 CD ad superficiem trunci 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T&; sed hæc duæ potestem rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T&; & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione
figu.

24
huius.

Figura XYZ circa axem VS in ratione composita, ex proportionem superficiei trunci inferioris 34 CD ad superficiem trunci inferioris 567 YXZ & ex proportionem radii rotationis EL ad radium rotationis TO, quod demonstrandum erat.

Hoc Theorema etiam locum habet eodemque modo demonstratur in superficiibus rotundis genitis a rotatione lineæ vel linearum quarumcunque figuram non comprehendunt.

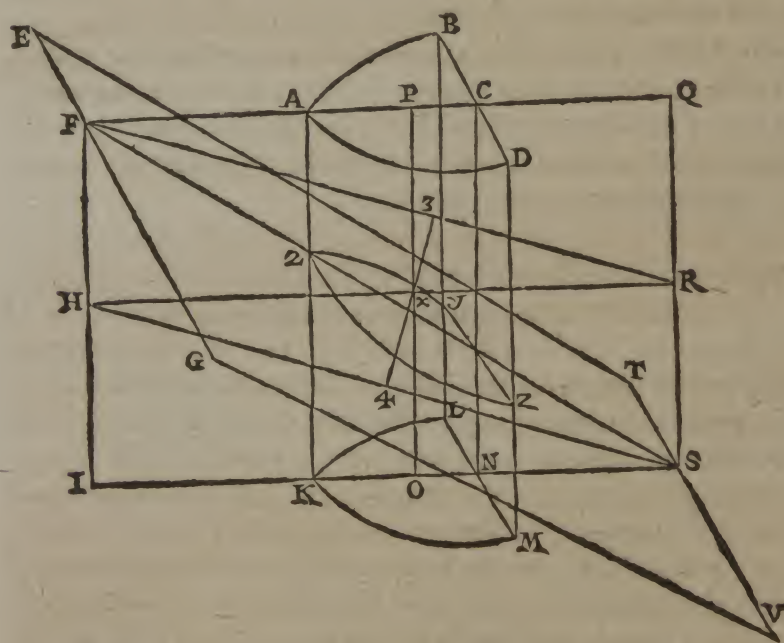
P R O P. 29. T H E O R E M A.

Si super qualibet figura circa axem intelligatur cylindricus rectus, ita sectus a plano in duos truncos, ut planum per oppositarum cylindrici basium axes ductum, fiat plano secanti normale; truncus unus erit ad truncum alterum reciproce, ut partes radii rotationis sectæ a centro gravitatis figura.

SVper qualibet figura LKM circa axem KN sit cylindricus rectus ABDMLK sectus in truncos ABDZY₂, ZY₂ KLM, a plano ETVG ad planum ACNK, per oppositarum cylindrici basium axes AC, KN, ductum, normali: sint P, O, centra gravitatis basium oppositarum, quæ iungantur recta PO. Producat planum secans, donec axes AC, KN (si opus est) productos intersecet in punctis F, S; & in eosdem axes (si opus est) productos sint perpendiculares FI, SQ; manifestum est FISQ esse parallelogrammum rectangulum, item FI esse cylindrici altitudinem, & IS rotationis radium, quippe ad intersectionem plani secantis & baseos LKM nempe rectam TV est perpendicularis, quoniam ducitur in plano FQSI, quod utrique plano & secanti & baseos LKM est normale. Dico truncum ABDZY₂ esse ad truncum 2 YZMLK ut reciproce IO ad OS. a mediis punctis rectarum FI, QS, nempe H, R, ducantur rectæ HS, RF, necnon HR secans OP in X; erunt itaque inter se parallellæ &

H aqua-

æquales FI, PO, QS, item FQ, HR, IS, item FR, HS.
 Quoniam FR bifariam secat QS, bifariam quoque secabit
 in triangulo FQS omnes rectas ipsi QS æquidistantes; & pro-
 inde bifariam secabit omnes diametros rectangulorum in
 trunco ABDZY a plano FISQ normaliter secatorum; &
 ideo transibit per centra gravitatis omnium eorundem re-
 ctangulorum, cumque ipse truncus constetur ex omnibus
 istis rectangulis; idcirco transibit etiam recta FR per cen-



trum gravitatis ipsius trunci, hoc supponatur esse 3: eodem
 modo demonstratur in HS esse centrum gravitatis trunci YZ
 MLK²: cum ergo X medium punctum rectæ OP sit centrum
 gravitatis totius cylindrici; si a 3 per X producatur recta 3X
 4 donec rectam HS intersecet in 4, erit 4 centrum gravita-
 tis

tis trunci $YZMLK_2$; & quia triangula XR_3 , XH_4 , sunt similia propter parallellas RF , HS , est ut X_4 ad X_3 ita XH ad XR , hoc est, IO ad OS ; sed ut X_4 ad X_3 ita truncus $ABDZY_2$ ad truncum $YZMLK_2$; & proinde ut truncus $ABDZY_2$ ad truncum $YZKMK_2$ ita reciproce IO ad OS , quod demonstrandum erat.

CONSECTARIVM.

ET proinde componendo totus cylindricus $ABDMLK$ est ad truncum inferiorem $YZMLK_2$ ut radius rotationis IS ad distantiam inter centrum gravitatis figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS .

PROP. 30. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente; superficies trunci unius est ad superficiem trunci alterius reciproce, ut partes radij rotationis resectæ a centro gravitatis perimetri figuræ.

EAdem sit figura & præparatio, quæ in antecedente, hoc solum excepto, quod O , P , puncta nunc supponantur esse contra gravitatis perimetrorum basium oppositarum. Dico superficiem trunci $ABDZY_2$ esse ad superficiem trunci $YZMLK_2$ ut reciproce IO ad OS . A mediis punctis rectarum FI , QS , nempe H , R , ducantur rectæ HS , RF , necnon HR secans OP in X ; erunt itaque inter se parallellæ & æquales rectæ FI , PO , QS , item FQ , HR , IS , item FK , HS . Quoniam FR bifariam secat QS , bifariam quoque secabit in triangulo FQ omnes rectas ipsi QS æquidistantes, & proinde bifariam secabit omnes diametros rectangulorū in trunco $ABDZY_2$ a plano $FISQ$ normaliter secatorum; & ideo transibit per omnia centra gravitatis oppositorum laterum basi cylindrici perpendicularium uniuscuiusque ex illis rectangulis, quoniam

H æ $niam$

niam in medio diametri est centrum grauitatis laterum oppositorum; cumq; ipsa trunci superficies confletur ex omnibus istis lateribus oppositis basi cylindrici perpendicularibus, idcirco transibit etiam recta FR per centrum grauitatis superficiei ipsius trunci, hoc supponatur 3: eodem modo demonstratur in HS esse centrum grauitatis superficiei trunci YZMLK₂; cum ergo X medium punctum rectæ OP sit centrum grauitatis totius superficiei cylindrici, si a 3 per X producaturs recta 3X4 donec rectam HS intersecet in 4, erit 4 centrum grauitatis superficiei trunci YZMLK₂: & quia triangula XR 3, XH₄, sunt similia propter parallellas RF, HS, est vt X₄ ad X₃ ita XH ad XR, hoc est IO ad OS; sed vt X₄ ad X₃ ita superficies trunci ABDZY₂ ad superficiem trunci YZMLK₂; & proinde, vt superficies trunci ABDZY₂ ad superficiem trunci YZMLK₂, ita reciproce IO ad OS quod demonstrandum erat.

CONSECTARIUM.

ET componendo tota superficies cylindrici AB DMLK est ad superficiem trunci inferioris YZMLK₂ vt radius rotationis IS ad interceptam inter centrum grauitatis perimetri figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS.

Demonstrantur quoque hæc eodem modo in truncis insistentibus lineæ vel lineis quibuscunque figuram non comprehendentibus, si modo sint ad axem.

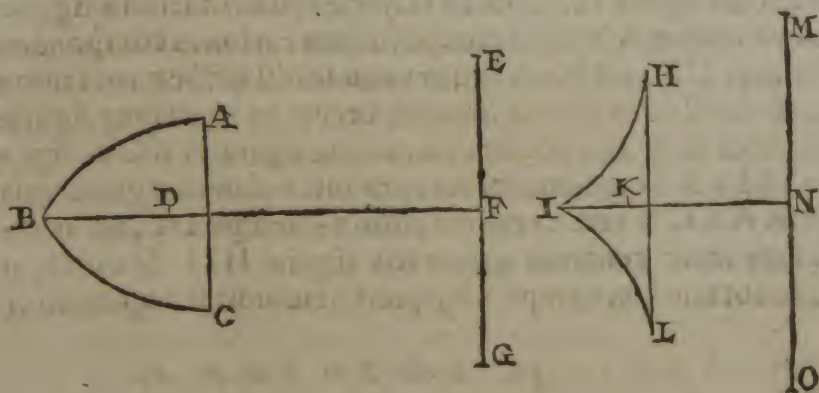
Dux præcedentes propositiones sunt etiam veræ in omni cylindrico, sed intricata est constructio generali demonstrationi inseruiens, & ideo nostrum intentum alio modo euicemus.

PROP. 31. THEOREMA.

Si sint due figura quacunque circa axes, quas sic rotentur vt axes rotationis sint figura vnus cuiusque axi normales; ratio vnus solidi orti ex tali rotatione ad aliud solidum ex eadem genitum, com-

componitur ex ratione directâ figurâ ad figuram, & ex ratione directâ interceptâ inter centrum gravitatis & axem rotationis unius figurâ ad similem interceptam alterius figurâ.

Sint duę figurę quęcunque ABC , HIL , circa axes BF , IN , quę rotentur circa rectas EG , MO , axes figurarum (si opus est) productos BF , IN , normaliter secantes in punctis F , N , sintque figurarum ABC , HIL , centra gravitatis D , K . Dico rationem, solidi orti ex figura ABC rotata circa rectâ EG ad solidum ortum ex figura HIL rotata circa rectam MO , componi ex ratione figurę ABC ad figuram HIL & ex ratione DF ad KN . Super figuris ABC , HIL , intelligantur cylindrici recti æqualti secti a planis transeuntibus per EG , MO , rectas, unusquisque in duos truncos nempe superiorem & inferiorem. Ratio solidi ex ABC orti ad solidum ex HIL ortum, componitur ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad truncum inferiorem cylindrici super HI



L , & ex ratione radii rotationis figurę ABC ad radium rotationis figurę HIL ; sed truncus inferior cylindrici super ABC est ad truncum inferiorem cylindrici super HIL in ratione composita, ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad totum cylindricum super ABC , ex ratione totius

tius cylindrici super ABC ad totum cylindricum super HIL , & ex ratione totius cylindrici super HIL ad truncum sui inferiorem: sed truncus inferior cylindrici super ABC est ad totum cylindricum, vt FD ad rotationis radium figuræ ABC ex conſeſſario huius 29 conuertendo, & cylindricus super ABC est ad cylindricum super HIL vt figura ABC ad figuram HIL , item cylindricus super HIL est ad truncum suum inferiorem vt radius rotationis figuræ HIL ad KN , ex conſeſſario huius 29; & proinde ratio trunci inferioris cylindrici super ABC ad truncum inferiorem cylindrici super HIL componitur ex ratione rectæ DF ad rotationis radium figuræ ABC , ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL , & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN : & ideo ratio solidi orti ex rotatione figuræ ABC ad solidum ortum ex rotatione figuræ HIL componitur, ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL , ex ratione rectæ DF ad radium rotationis figuræ ABC , ex ratione radii rotationis figuræ ABC ad radiū rotationis figuræ HIL , & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN ; sed tres poſtremæ rationes componunt rationem DF ad KN ; & igitur ratio solidi orti ex rotatione figuræ ABC circa EG ad solidum ortum ex rotatione figuræ HIL circa MO componitur ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL , & ex ratione interceptæ inter centrum grauitatis figuræ ABC & eius axem rotationis, nempe DF , ad interceptam inter centrum grauitatis figuræ HIL & eiusdem axem rotationis, nempe KN , quod demonſtrare oportuit.

P R O P. 32. T H E O R E M A.

Eiſdem poſitis, qua in antecedente; ratio, ſuperficii vnus ſolidi orti ex tali rotatione ad ſuperficiem alterius ſolidi ex eadem geniti, componitur ex ratione directâ perimetrorum figurarum & ex ratione directâ interceptarum inter centra grauitatis perimetrorum & axes rotationis.

Eadem

Exdem sint figuræ & præparatio quæ in antecedente,
 hoc solum excepto, quod D, K, puncta, nunc supponā-
 tur esse centra gravitatis perimetrorum figurarum. Dico ra-
 tionem superficiei solidi orti ex figura ABC rotata circa re-
 ctam EG ad superficiem solidi orti ex figura HIL rotata cir-
 ca rectam MO, componi ex ratione perimetri ABC ad peri-
 metrum HIL & ex ratione DF ad KN. Super figuris ABC,
 HIL, intelligantur cylindrici recti æquialti, secti a planis
 transeuntibus per EG, MO, rectas, unusquisque in duos
 truncos, nempe superiorem & inferiorem. Ratio superficiei
 solidi ex ABC orti ad superficiem solidi ex HIL orti, com-
 ponitur ex ratione superficiei trunci inferioris cylindrici
 super ABC ad superficiem trunci inferioris cylindrici super
 HIL, & ex ratione radii rotationis figuræ ABC ad radium
 rotationis figuræ HIL; sed superficies trunci inferioris cy-
 lindrici super ABC est ad superficiem trunci inferioris cy-
 lindrici super HIL in ratione composita, ex ratione superfi-
 ciei trunci inferioris cylindrici super ABC ad totam superfi-
 ciem cylindrici super ABC, ex ratione totius superficiei cy-
 lindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super HIL
 & ex ratione totius superficiei cylindrici super HIL ad
 superficiem trunci sui inferioris: sed superficies trunci infe-
 rioris cylindrici super ABC est ad totam superficiem cylin-
 drici ut FD ad rotationis radium figuræ ABC ex consuetario
 huius 30 conuertendo, & superficies cylindrici super ABC
 est ad superficiem cylindrici super HIL, ut perimenter ABC
 ad perimetrum HIL, item superficies cylindrici super HIL
 est ad superficiem sui trunci inferioris ut radius rotationis
 figuræ HIL ad KN; & proinde ratio superficiei trunci infe-
 rioris cylindrici super ABC ad superficiem trunci inferioris
 cylindrici super HIL componitur ex ratione rectæ DF ad ra-
 dium rotationis figuræ ABC, ex ratione perimetri ABC ad
 perimetrum HIL & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad
 rectam KN; & ideo ratio superficiei solidi orti ex rotatione
 fi.

figurę ABC ad superficiem solidi orti ex rotatione figurę HIL componitur, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL, ex ratione rectę DF ad radium rotationis figurę ABC, ex ratione radii rotationis figurę ABC ad radium rotationis figurę HIL, & ex ratione radii rotationis figurę HIL ad rectam KN; sed tres postremę rationes componunt rationē DF ad KN; & igitur ratio superficiē solidi orti ex rotatione figurę ABC circa EG ad superficiem solidi orti ex rotatione figurę HIL circa MO componitur ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL & ex ratione interceptę inter centrum gravitatis perimetri ABC & eius axem rotationis, nempe DF ad interceptam inter centrum gravitatis perimetri HIL & eiusdem axem rotationis, nempe KN, quod demonstrandum erat.

Hęc quoque locum habent, eodemque modo demonstrantur in superficiebus rotundis genitis a rotatione lineę vel linearum quarumcunque figuram non comprehendentium & ad axem existentium.

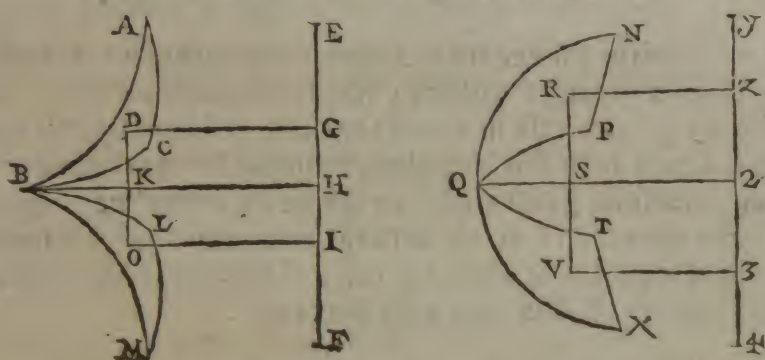
PROP. 33. THEOREMA.

Si sint due figura quacunque, quę rotentur circa axes quoscunque, ratio unius solidi orti ex tali rotatione ad solidum alterum ex eadem genitum, componetur ex directā ratione figura ad figuram, & ex directā ratione intercepta inter centrum gravitatis & axem rotationis unius figura ad similem interceptam alterius figura.

Sint duę figurę quęcunque ABC, NQP, quę rotentur circa rectas EF, Y4; sintque earum contra gravitatis D, R, e quibus in axes rotationis EF, Y4, demittantur rectę perpendiculares DG, RZ. dico rationem solidi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF ad solidum ortum ex figura NQP rotata circa rectam Y4 componi ex ratione figurę ABC, ad figuram NQP, & ex ratione DG ad RZ. Parallellæ
re-

33

Fe&is DG, RZ, ducantur rectæ BH, Q₂, figuras ABC, NQP,
 tangentes in B, Q; & circa rectas BH, Q₂, sicut axes, conci-
 piantur reuolui figuræ ABC, QNP, donec ex altera axium
 parte planum attingentes, efficiant figuras BLM, QTX, sibi
 ipsis æquales, similes, & ad rectas BH, EF; Q₂, Y₄, eandē
 prorsus positionem habentes: sint figurarum BLM, QTX,
 centra grauitatis, O, V; ducantur in rectas EF, Y₄, perpen-
 diculares OI, V₃, iungantur quoque rectæ DO, RV, rectas
 BH, Q₂, intersecantes in punctis K, S: manifestum est pun-



Etum K esse centrum grauitatis integræ figuræ BACBLM
 circa axem BH, item punctum S esse centrum grauitatis fi-
 guræ integræ QNPQTX circa axem Q₂; patet quoque rectas
 DG, KH, OI; item RZ, S₂, V₃, esse inter se æquales. Quoniā
 figuræ BACBLM, QNPQTX sunt circa axes BH, Q₂, axibus
 rotationis EF, Y₄, normales; igitur solidum rotundum or-
 tum ex rotatione figuræ BACBLM circa rectam EF est ad
 solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ QNPQTX in
 ratione composita ex ratione figuræ BACBLM ad figuram
 QNPQTX & ex ratione KH ad S₂ per huius 31; sed solidum
 ortum ex figura BACBLM rotata circa EF est duplum soli-
 di orti ex figura BAC circa eandem EF rotata; item solidum
 ortum ex figura QNPQTX rotata circa rectam Y₄ est duplū

I

so-

solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem Y4; figura quoque BACBLM dupla est figuræ BAC, & figura QNP QTX figuræ QNP; cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis; solidum rotundum ortum ex figura ABC rotata circa rectam E Ferit ad solidum rotundum ortum ex figura NQP rotata circa rectam Y4 in ratione composita ex ratione figuræ ABC ad figuram NQP & ex ratione KH ad S2, seu DG ad RZ, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

SInt sequitur, si centra gravitatis figurarum a rotationis axibus æqualiter distent, solida rotunda ex figurarum rotatione genita esse in directa ratione ipsarum figurarum, quod si figuræ ipsæ sint æquales, sequitur solida rotunda ex earum rotatione genita esse in ratione directa interceptarum inter centra gravitatis & rotationis axes: quod si interceptæ sint æquales & figuræ, etiam si inter se dissimillimæ, solida rotunda ex illis orta æqualia erunt.

SCHOLIUM.

EX dictis manifestum est inter duas quascunque figuras tres esse rationes, nempe; figuræ ad figuram, solidi rotundi ex rotatione unius figuræ geniti, ad solidum rotundum ex rotatione alterius figuræ genitum, & interceptæ inter centrum gravitatis & axem rotationis unius figuræ ad similem interceptam alterius figuræ, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

PROP. 34. THEOREMA.

Si sint duæ figura quæcunque, quæ rotentur circa axes quoscunque; ratio superficiei unius solidi orti ex tali rotatione ad superficiem alterius

terius solidi ex eadem geniti, componitur ex directa ratione perimetri ad perimetrum & ex directa ratione intercepta inter centrum gravitatis perimetri & axem rotationis unius figura ad similem interceptam alterius figura.

Sint duæ figuræ quæcunque ABC , NQP , quæ rotentur circa rectas EF , $Y4$; sintque contra gravitatis perimetrorum D , R , a quibus in axes rotationis EF , $Y4$, demittantur rectę perpendiculares DG , RZ . dico rationem superficiei solidi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF ad superficiem solidi orti ex figura NQP rotata circa rectam $Y4$ componi, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione DG ad RZ . parallellę rectis DG , RZ , ducantur rectę BH , $Q2$, figuras ABC , NQP , tangentes in B , Q ; & circa BH , $Q2$, sicut axes concipiantur reuolvi figuræ ABC , QNP , donec ex altera axium parte in idem planum reuolutę figuras efficiant BLM , QTX , sibi ipsis æquales, similes, & ad rectas BH , EF ; $Q2$, $Y4$, eandem omnino positionem habentes. Sint perimetrorum BLM , QTX , centra gravitatis O , V ; ducantur in rectas EF , $Y4$, perpendiculares Ol , $V3$; iungantur rectę DO , RV , rectas BH , $Q2$, intersecantes in punctis K , S ; manifestum est punctum K esse centrum gravitatis integri perimetri $BACBLM$; estque figura $BACBLM$ circa axem BH , eodem modo punctum S est centrum gravitatis integri perimetri figurę $QNPQTX$ circa axem $Q2$; patet quoque rectas DG , KH , Ol , item RZ , $S2$, $V3$, esse inter se æquales. quoniam figura $BACBLM$, $QNPQTX$, sunt circa axes BH , $Q2$, axibus rotationis EF , $Y4$, normales; igitur superficies solidi rotundi orti ex rotatione figurę $BACBLM$ circa rectam EF est ad solidi i rotundi superficiem orti ex rotatione figurę $QNPQTX$ in ratione composita ex ratione perimetri $BACBLM$ ad perimetrum $QNPQTX$ & ex ratione KH ad $S2$; sed superficies solidi orti ex figura $BACBLM$ rotata circa EF est dupla
superficiei solidi orti ex figura BAC rotata circa eandem E ³² huius.

I 2 F, item

E item superficies solidi rotundi orti ex figura $QNPQTX$ rotata circa rectam $Y4$ est dupla superficiei solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem $Y4$; perimetrum quoque $BACBLM$ duplum est perimetri BAC , & perimetrum $QNPQTX$ perimetri QNP (hoc est si figuræ se inuicem tangant in puncto solummodo; quod si se tetigerint in recta linea, oportet imaginari aliquam distantiolam inter figurarum vniones, vt generalis fiat demonstratio) cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis, superficies solidi rotundi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad superficiem solidi rotundi orti ex figura NQ rotata circa rectam $Y4$ in ratione composita, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione KH ad Sz seu DG ad RZ , quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Hinc sequitur, si centra grauitatis perimetrorum a rotationis axibus æqualiter distent, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in directa ratione ipsorum perimetrorum, quod si ipsa perimetra sint equalia, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in ratione directa interceptorum inter centra grauitatis perimetrorum & rotationis axes, quod si interceptæ sint equalles & perimetra equalia, superficies solidorum rotundorum semper esse equalles.

SCHOLIUM.

EX dictis ergo manifestum est inter duas quascunque figuras tres alias esse rationes a tribus præcedentibus diuersas, nempe perimetri ad perimetrum, superficiei solidi rotundi ex rotatione vnus figuræ geniti ad superficiem solidi rotundi ex rotatione alterius figuræ geniti, &

in-

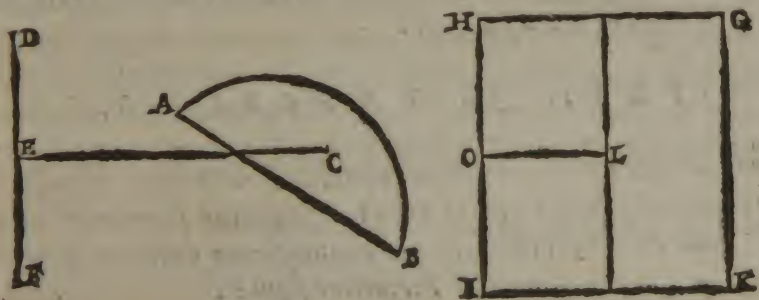
interceptę inter centrum grauitatis perimetri & axem rotationis vnus figurę ad similem interceptam alterius figurę, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

Eodem modo demonstrantur hęc omnia vniuersaliter in omnibus, linea, vel lineis figuram non comprehendentibus, ita vt omnium demonstrationum geometricarum hę sint maxime vniuersales.

P R O P. 35. T H E O R E M A.

Omne solidum rotundum æquale est cylindrico recto cuius basis est figura ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia circuli in qua circumuoluitur centrum grauitatis figura.

Sit figura quęcunque *AB* cuius grauitatis centrum *C*; ex figurę *AB* rotatione circa rectam *DE* fiat solidum rotundum, quod dico esse æquale cylindrico cuius basis *AB* figura & altitudo circumferentia circuli, in qua circumrotatur centrum grauitatis *C*. Sit rectangulum *HGKI*



cuius centrum grauitatis *L*; ex rotatione rectanguli *HGKI* circa latus *HI* concipiatur fieri cylindrus, & ex grauitatum cen-

centris C, L , in rotationis axes DF, HI , demittantur p̄p̄-
 diculares rectæ CE, LO , quæ sunt rotationis radii: manife-
 stum est cylindrum genitum ex rotatione rectanguli HK cir-
 ca HI æqualem esse solido cuius basis est circulus ex radio IK
 & altitudo HI , hoc est solido cuius basis est rectangulum
 ex IK in semicircumferentiam circuli ex radio IK vel totam
 circumferentiam ex radio OL & altitudo HI , quod idem est
 cum solido cuius basis est rectangulum HK & altitudo cir-
 cumferentia circuli ex radio OL ; sed cylindrus ex rotatione
³³
 huius. HK circa HI est ad solidum rotundum ex rotatione AB circa
 DF in ratione composita ex proportionem figuræ HK ad figu-
 ram AB & rectæ OL ad rectam EC seu circumferentiæ radii
 OL ad circumferentiæ radii EC , atque solidum cuius basis
 HK & altitudo circumferentia radii OL , seu cylindrus geni-
 tus ex rotatione figuræ HK circa HI , est ad solidum cuius ba-
 sis AB & altitudo circumferentiæ radii EC in eadem ratio-
 ne; & ideo cylindrus ex rotatione figuræ HK circa HI est ad
 solidum rotundum ex rotatione figuræ AB circa DF ut idem
 prædictus cylindrus ad solidum cuius basis AB & altitudo
 circumferentia circuli ex radio EC ; & proinde solidum ro-
 tundum ex rotatione figuræ AB circa DF æquale est cylin-
 drico cuius basis AB & altitudo circumferentia radii EC ,
 quod demonstrare oportuit.

P R O P. 36. T H E O R E M A.

*Omnis solidi rotundi superficies æqualis est rectangulo cuius basis est
 Perimeter figura ex cuius rotatione gignitur solidum & alti-
 tudo circumferentia in qua circumfertur centrum gra-
 vitatis Perimetri figura.*

E Idem positis quæ in antecedente, sint centra gravitatis
 perimetrorum figurarum HK, AB , puncta L, C ; dico
 superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ AB circa
 DF

DF esse æqualem rectangulo cuius basis est perimeter figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC. manifestum est superficiem cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI æqualem esse rectangulo cuius basis est circumferentia radii IK & altitudo GK una cum IK, hoc est rectangulo cuius basis circumferentia radii OL & altitudo totus figuræ ambitus HG + GK + KI + IH, quod idem est cum rectangulo cuius basis est rectanguli HK ambitus & altitudo circumferentia radii OL; sed superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI est ad superficiem solidi rotundi geniti ex figuræ AB rotatione circa DF in ratione composita ex proportionibus ambitus figuræ HK ad ambitum figuræ AB & ex proportionibus rectæ OL ad rectam EC seu circumferentiam radii OL ad circumferentiam radii EC; atque rectangulum cuius basis est ambitus figuræ HK & altitudo circumferentia radii OL, seu superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI, est ad rectangulum cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC in eadem ratione; & ideo superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI est ad rectangulum, cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC, ut idem superficies ad superficiem solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ AB circa axem rotationis DF; & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ AB circa DF æqualis est rectangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC, quod demonstrare oportuit.

34
huius,

Non dissimili fere methodo demonstratur hæc propositio, etiam si perimeter figuræ non sit clausus.

PROP. 37. THEOREMA.

Si cylindricus rectus secetur plano ad basem seminormali; truncus inferior aqualis erit cylindrico cuius basis eadem est cum cylindrico

*drici propositi base, & altitudo, intercepta recta inter centrum
gravitatis baseos & communem intersectionem baseos & plani se-
cantis.*

S Int eedem figuræ, quæ in antecedente: super figurâ
AB (cuius gravitatis centrum C) concipiatur cylin-
dricus rectus Sectus à plano basem AB seminormaliter
secante in recta DF: dico truncum eius inferiorem æqualem
esse cylindrico super base AB habenti altitudinem EC. So-
lidum rotundum ortum ex rotatione figuræ AB circa rectam
DF æquale est cylindrico cuius basis AB & altitudo circum-
ferentia radij EC; atque idem solidum rotundum est ad
truncum inferiorem cylindrici recti super AB resectam à
plano basem AB seminormaliter secante in recta DF ut cir-
cumferentia radij CE ad radium CE; sed cylindricus cuius
basis AB & altitudo circumferentia radii CE seu prædictum
solidum rotundum est ad cylindricum cuius basis AB & al-
titudo EC, ut circumferentia radii EC ad EC; & proinde
truncus ille interior resectus æqualis est cylindrico cuius
basis AB & altitudo EC, quod demonstrare oportuit.

P R O P. 38. T H E O R E M A.

*Si cylindricus rectus secetur Plano ad basem seminormali; superfi-
cies trunci inferioris aqualis erit rectangulo, cuius basis est pe-
rimeter baseos cylindrici & altitudo intercepta recta inter cen-
trum gravitatis Perimetri baseos & communem intersectionem
baseos & plani secantis.*

E Idem positis quæ in antecedente, sit C centrum graui-
tatis perimetri baseos AB. Dico superficiem trunci in-
ferioris æqualem esse rectangulo cuius basis est ambitus fi-
guræ AB & altitudo recta EC. Superficies solidi rotundi ge-
niti ex rotatione figuræ AB circa DF æqualis est rectangulo
cuius

Cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferen-
 tia radii BC; atque eadem superficies solidi rotundi est ad
 superficiem trunci inferioris cylindrici recti super AB rese-
 cti a plano basem AB seminormaliter secante in recta DF, ²⁴ huius
 ut circumferentia radii CE ad CE; sed rectangulum cuius
 basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii
 EC seu superficies solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ
 AB circa DF est ad rectangulum cuius basis est ambitus fi-
 guræ AB & altitudo EC, ut circumferentia radii EC ad EC;
 & proinde superficies trunci inferioris resecti æqualis est re-
 ctangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo EC,
 quod demonstrare oportuit.

Eodem modo demonstratur hæc propositio, si superficies
 cylindrici recti insistat lineæ vel lineis perimetrum non clau-
 dentibus.

SCHOLIUM.

IN duabus præcedentibus eisdem mediis demonstratur,
 quomocunque secetur cylindricus, in prima, trun-
 cum inferiorem esse æquale cylindrico eandem cum propo-
 sito basem habenti & altitudinem æqualem perpendiculari
 rectæ ad basem ex eius gravitatis centro excitatæ usque ad
 planum secans, & in secunda, superficiem trunci inferioris
 esse æqualem rectangulo basem habenti æqualem perime-
 tro baseos cylindrici propositi & altitudinem æqualem per-
 pendiculari rectæ ad basem cylindrici propositi ex centro
 gravitatis eius perimetri excitatæ usque ad planum secans.

PROP. 39. THEOREMA.

*Si cylindricus rectus, habens basem ab una parte à recta termina-
 tam, secetur plano per illam rectam, & rosetur basis cylindricæ
 circa eandem rectam, ut fiat solidi rotundi portio qualibet: erit
 portionis centrum gravitatis idem cum centro gravitatis arcus*

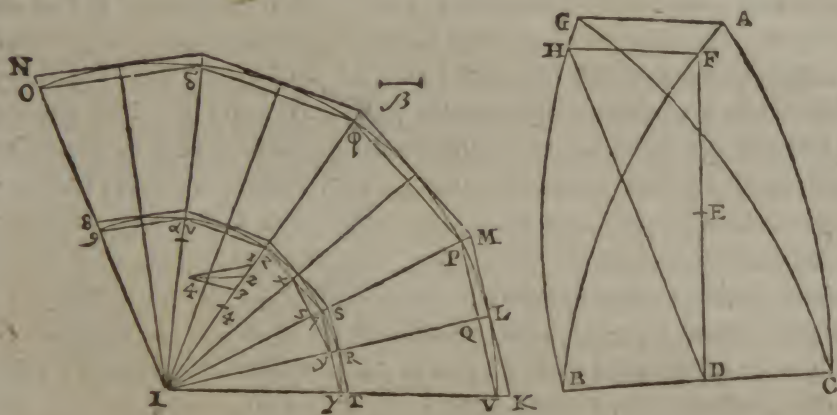
K

cir.

circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrii trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatur.

SIt super figura ABC ex vna parte a recta BC terminata cylindricus rectus, qui sectus a plano transeunte per rectam BC exhibeat truncum suum inferiorem $BCAG$, cuius centrum æquilibrii in base sit E . Ex rotatione figuræ ABC circa rectam BC fiat portio solidi rotundi: dico portionis centrum gravitatis idem esse cum centro gravitatis arcus circularis in quo circumrotatur punctum E : si non sint eadē, inter illa sit distantia recta β ; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2 vel 4 vel 16, 32, & vel quocunque (dummodo numerus sit in progressionem dupla a binario) æqualibus truncis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habente communem intersectionem cum base rectam BC , & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita vt eorum centra gravitatis distent interuallo minore quam recta β ; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera, eo in infinitum portioni sunt propiora: deinde per centrum æquilibrii E rectæ BC normale ducatur planum faciens cum trunco communem intersectionem triangulum HFD rectangulum ad F , item cum portione solidi rotundi communem intersectionem sectorem circuli $IVLO$, & cum polyedro circumscripto polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium IV esse æqualem rectæ DF . Radio $I\gamma$ æquali rectæ DE sit sector circuli $IY\theta$ & sectori $IY\theta$ circumscribatur polygonum $TS8$ simile polygono KMN , item eidem inscribatur polygonum $\gamma 79$ circumscripto simile. Ducatur recta IL quatuor latera similium polygonorum $\gamma 7$, S , T , PV , MK , bifariam secans in punctis Y, R, Q, L ; manifestum est triangulum ILK rectangulum ad L esse communem sectionem.

tionem plani secantis cum vno æqualium truncorum e quibus constat polyedrum portioni solidi rotundi circumscriptum; quem truncum supponamus esse eundem cum trunco ABC (quod sine absurdo efficere possumus, quoniam omnes trunci inferiores, quorum plana secantia basem secant in recta BC , idem habent in base centrum æquilibrii E) & proinde patet trunci, communem habentis cum plano secante intersectionem LIK , centrum æquilibrii in base esse punctum R ; eodemque modo probatur punctum R esse in



base centrum æquilibrii trunci, cuius intersectio cum plano secante est ML ; & ideo horum truncorum simul iunctorum centrum gravitatis est R punctum: eodem modo probatur in duobus quibilibet truncis totius polyedri circumscripti ad vnam superficiem iunctis, viriusque simul trunci centrum gravitatis esse in puncto, ubi recta ex vertice I basem trianguli (quod triangulum est communis sectio plani secantis cum duobus iunctis truncis) bifariam secans, arcum circula-rem 97 intersecat: facili quoque negotio probatur punctum Y esse centrum gravitatis duorum truncorum iunctorum,

K 2 quo.

quorum cum plano secante communis intersectio PIV triangulum; item & punctum X esse centrum gravitatis duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio ϕ IP triangulum: iungatur recta XY, quæ bifariam secatur in puncto 5; manifestum est punctum 5 esse centrum gravitatis quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium IVP ϕ ; atque punctum 5 centrum etiam est gravitatis rectarum Z 7, 7 7, simul: eodem modo probatur α esse centrum gravitatis quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium I ϕ δ O, & etiam rectarum 97, 97, simul. Centra gravitatis α 5 iungantur recta, quæ bifariam secetur a recta I Z in puncto 3; manifestum est 3 centrum gravitatis polyedri inscripti esse etiam centrum gravitatis rectarum omnium simul arcui 97 inscriptarum: eodem modo probatur centrum gravitatis polyedri circumscripti nempe 1 idem esse cum centro gravitatis omnium rectarum simul arcui 97 circumscriptarum. Sit centrum gravitatis portionis solidi rotundi 4, & centrum gravitatis arcus 97, 2, quod necessario est in recta I Z inter puncta 1, 3; iungantur rectæ 14, 24, 34. Ex constructione 13 minor est quam 24: angulorum 124, 423, sit maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius erit latere 24, sed 24 maior est quam 13; & proinde 14 maior est quam 13; hoc est, centrum gravitatis portionis solidi rotundi distat a centro gravitatis polyedri sibi circumscripti maiore intervallo quam centrum gravitatis eiusdem polyedri circumscripti distat a centro gravitatis similis polyedri inscripti, quod est absurdum, maiore enim intervallo distant centra gravitatis polyedrorum inscripti & circumscripti quam distant centra gravitatis portionis solidi rotundi & polyedri circumscripti; & proinde nullo intervallo distant centra gravitatis portionis solidi rotundi & arcus circularis 97, & ideo idem est eorum centrum gravitatis, quod demonstrare oportuit.

No-

Notandum in sequentibus nos semper intelligere superficiem portionis solidi rotundi absque planis quibus terminatur.

PROP. 40. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente, erit superficiei portionis solidi rotundi centrum gravitatis idem cum centro gravitatis arcus circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrii superficiei trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.

Eisdem positis quæ in antecedente, sit superficiei trunci BCAG centrum æquilibrii in base E. Dico superficiei portionis solidi rotundi centrum gravitatis idem esse cum centro gravitatis arcus circularis in quo circumrotatur punctum E: si non sint eadem, inter illa sit differentia recta β ; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2, 4, 8, 16 vel quocunque (dummodo numerus sit in progressionem dupla a binario) equalibus truncis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habente communem sectionem cum base rectam BC, & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita ut centra gravitatis eorum superficierum distent minore intervallo quam β ; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera eo in infinitum eorum superficies minus inter se discrepant, ita ut eorum differentia minor possit esse quacunque proposita quantitate. Deinde per centrum æquilibrii E rectæ BC normale ducatur planum faciens cum trunco ABCG communem sectionem triangulum HFD rectangulum ad F, item cum portione solidi rotundi communem sectionem, sectorum circuli IVLO & cum polyedro circumscripto portionem polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium IV esse æqualem rectæ DF: radio IV æquali rectæ DE

DE sit sector circuli $I\gamma 9$, & sect ori $I\gamma 9$ circumscribatur polygonum $TS8I$ simile polygono $IKMN$, item eidem inscribatur polygonum $I\gamma 79$ circumscripto simile. Ducatur recta IL latera quatuor parallela similium polygonorum 7γ , ST , PV , MK , bifariam dividens in punctis Y, R, Q, L ; manifestum est triangulum ILK rectangulum ad L esse commune sectionem plani secantis cum vno æqualium truncorum ex quibus constat polyedrum portioni solidi rotundi circumscriptum, quem truncum supponamus esse eandem cū trunco $ABCG$ (quod sine absurdo efficere possumus, quoniam omnes truncorum inferiorum superficies, quorum plana secantia basem secant in recta BC , idem habent in base centrum æquilibrii E) & proinde patet superficiei trunci, communem habentis cum plano secante intersectionem $L I K$, centrum æquilibrii in base esse punctum R ; eodemque modo probatur punctum R esse in base centrum æquilibrii superficiei trunci, cuius intersectio cum plano secante est ML , & ideo horum truncorum simul iunctorum superficiei centrum gravitatis est R : eodem modo probatur in duobus quibilibet truncis totius polyedri circumscripti ad vnam superficiem iunctis vtriusque simul superficiei centrum gravitatis esse in puncto, vbi recta ex vertice I basem trianguli (quod triangulum est communis sectio plani secantis cum duobus iunctis truncis) bifariam secans, arcum circularem 9γ intersecat: facili quoque negotio probatur punctum Y esse centrum gravitatis superficiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio IPV ; item & punctum X esse centrum gravitatis superficiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio ϕIP triangulum: iungatur recta XY , quæ bifariam secatur in puncto 5 ; manifestum est punctum 5 esse centrum gravitatis superficiei quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cū plano secante communis intersectio est trapezium $IVP\phi$; atque punctum 5 centrum etiam est gravitatis rectarum $Z 7$,

77, simul: eodem modo probatur α centrum gravitatis re-
 ctarum 97, 2, esse centrum gravitatis superficiei quatuor iun-
 ctarum truncorum simul, quorum cum plano secante com-
 munis intersectio est trapezium I ϕ δ O. Centra gravitatis α ,
 5, iungantur recta α 5, quæ bifariam secetur in 3. manifestum
 est 3 centrum gravitatis superficiei polyedri inscripti esse
 etiam centrum gravitatis rectorum omnium simul arcui 97
 inscriptorum. eodem modo probatur centrum gravitatis
 superficiei polyedri circumscripti nempe 1 idem esse cum
 centro gravitatis omnium rectorum arcui 97 circumscripto-
 rum: Sit centrum gravitatis superficiei portionis solidi ro-
 tundi 4 & centrum gravitatis arcus 97, 2, quod necessario
 est in recta IZ inter puncta 1, 3; iungantur rectæ 14, 24, 34;
 & constructione 13 minor est quam 24; angulorum 124, 423,
 sit maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius
 est latere 24, sed 24 maior est quam 13, & proinde 14 maior
 est quam 13, hoc est, centrum gravitatis superficiei portio-
 nis solidi rotundi distat a centro gravitatis superficiei po-
 lyedri sibi circumscripti maiore intervallo quam centrum
 gravitatis superficiei eiusdem polyedri circumscripti distat
 à cetro gravitatis superficiei similis polyedri inscripti, quod
 est absurdum, maiore enim intervallo distant centra gravita-
 tis superficierum polyedrorum inscripti & circumscripti,
 quam distat centrum gravitatis superficiei portionis solidi
 rotundi a centro gravitatis superficiei polyedri siue inscripti
 siue circumscripti; & proinde nullo intervallo distant centra
 gravitatis superficiei portionis solidi rotundi & arcus 97, &
 ideo idem est eorum centrum gravitatis, quod demonst-
 randum erat.

Eodem modo demonstratur hæc propositio de superficie
 quacunque rotunda facta a rotatione vnius lineæ vel plurium
 linearum circa axem; modo radius rotationis illas non secet
 in pluribus punctis.

PROP.

libri in base esse punctum G. ex rotatione figuræ ACDKB circa rectam AB (ita ut eius pars extrema, nempe figura CDKE, describat prædicti solidi rotundi portionem) fiat solidi rotundi portio, cuius centrum gravitatis M; manifestum est solidi rotundi portionem genitam a rotatione figuræ ACDKB esse æqualē portionibus, solidi rotundi genitæ à rotatione figuræ CDKE (cuius centrum gravitatis L) & solidi rotundi genitæ à rotatione figuræ ACEKB (cuius centrum gravitatis N) item truncum super figura ACDKB æqualē esse truncis super figuris CDKE, ACEKB; & proinde patet puncta F, H, G, esse in vna recta, item FH esse ad HG ut truncus super ACEKB ad truncum super CDKE, item puncta L, M, N, esse in vna recta, & LM esse ad MN ut portio solidi rotundi geniti a figura ACEKB ad portionem solidi rotundi geniti a figura CDKE; sed portiones solidorum rotundorum inter se sunt in directa ratione truncorū, ut facile colligitur ex huius 23; & ideo ut FH ad HG ita LM ad MN. per puncta F, L, sit recta FLO, & per puncta H, M, recta HMP, item per puncta G, N, sit recta GNQ, satis patet rectas HMP, GNQ (cum sint radii circulorum, in quorum circumferentiis rotantur puncta H, G,) & ideo rectam etiam FLO esse inter se parallelas & rectæ AB normales, & ideo ut PM ad PH vel QN ad QG ita OL ad OF; sed M, N, sunt centra gravitatis arcuum circularium similium in quibus rotantur puncta H, G, circa centra P, Q; & ideo L est etiam centrum gravitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum F circa centrum O, atque L est etiam centrum gravitatis portionis solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ CDKE circa rectam AB, quod demonstrare oportuit.

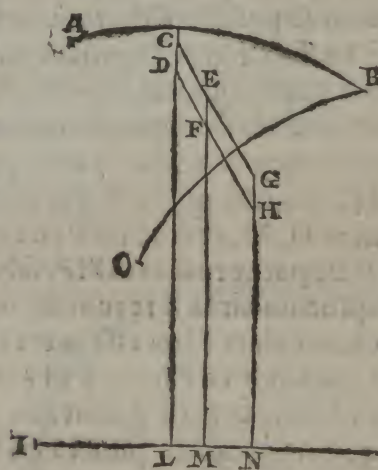
PROP. 42. THEOREMA.

Si linea vel linea quocunque rotentur circa rectam, ut ex prædictis generetur portio superficiæ rotundæ, etiamsi radius rotationis illa in quocunque punctis secuerit; erit portionis superficiæ rotundæ

L

*centrum gravitatis idem cum centro gravitatis arcus circularis in quo circumfertur centrum aequilibrj in base notatum superfici-
ciei trunci cylindrici recti secti à plano habente communem sectio-
nem cum base axem rotationis.*

Sit linea, vel lineæ quocunque ABO , quæ supponantur
rotari circa axem IK , secenturque in duobus punctis a
radio rotationis. Super lineis ABO imaginetur superficies
cylindrica ad basem recta, quæ secetur à plano basem etiam



secante in recta IK ; sitque superficiem trunci inferioris cen-
trum æquilibrj in base E . ex rotatione linearum ABO fiat
portio superficiem rotundæ; cuius centrum gravitatis F dico
esse idem cum centro gravitatis arcus circularis in quo ro-
tatur punctum E . sit B punctum in quo radius rotationis li-
neas ABO tangit, sitque portionis superficiem trunci super li-
nea vel lineis AB centrum æquilibrj in base C , & portionis
superficiem rotundæ ex AB genitæ D ; sitque superficiem trun-
ci

si super OB centrum æquilibrii in base G , & portionis superficiei rotundæ ex ea genitæ centrum gravitatis H . manifestum est puncta C, E, G , esse in eadem recta, item & CE esse ad EG ut superficies trunci super OB ad superficiem trunci super AB : eodem modo patet puncta D, F, H , esse in eadem recta, item DF esse ad FH ut portio superficiei rotundæ genitæ ex OB ad portionem superficiei rotundæ genitæ ex AB ; sed portiones superficieum rotundarum inter se sunt in directa proportionem superficieum truncorum ut colligitur ex huius 24; & ideo ut CE ad EG ita DF ad FH . producantur rectæ CD, EF, GH , donec rectam IK secant in punctis L, M, N ; cum puncta D, H , sint centra gravitatis arcuum circularium in quibus rotantur puncta C, G , manifestum est rectas CDL, GHN , esse axi rotationis IK normales & inter se parallelas; & ideo recta EFM eidem IK est normalis, cum sit ut CE ad EG ita DF ad FH ; & proinde ut LD ad LC vel NH ad NG ita MF ad ME , sed D, H , sunt centra gravitatis arcuum circularium similium in quibus rotantur puncta C, G ; & igitur punctum F est etiam centrum gravitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum E , quod demonstrandum erat.

40
huius;

Eodem modo demonstratur hoc theorema quando radius rotationis lineas secat in tribus punctis supponendo hanc propositionem, sicut hæc supponit huius 40 & sic deinceps (quando secatur linea in pluribus punctis) anteriores demonstrationes semper supponendo.

PROP. 43. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in huius 6; dico solidum rotundum genitum ex rotatione figuræ $ABSO$ circa rectam AB esse ad cylindrum genitum ex rotatione rectanguli $ABRO$ circa eandem AB , ut superficies genita ex rotatione curvæ AQ circa eandem AB ad circumulum ex radio AO . figura $ABSO$ est proportionaliter analoga curvæ AQ , & ideo centra gra-

2
huius;

L 2 vitatis

vitatis figuræ ABSO & curvæ A Q eodem intervallo distant à recta AB, quod intervallum sit K: centra quoque gravitatis rectæ AO & rectanguli ABRO eodem intervallo distant à recta AB nempe $\frac{BR}{2}$, atque figura ABSO est ad rectangu-

lum ABRO ut curvæ AQ ad rectam AO, & ideo primam & tertiam ducenda in circumferentiam cuius radius K, & secundam & quartam in circumferentiam cuius radius $\frac{BR}{2}$; erit

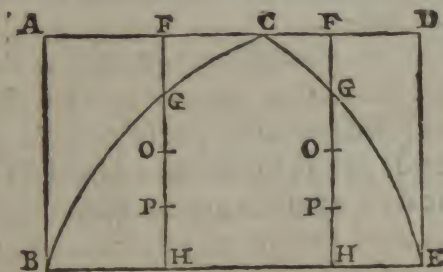
35 huius. cylindricus cuius basis ABSO & altitudo circumferentia ex radio K nempe solidum rotundum genitum ex rotatione figuræ ABSO circa AB, ad cylindricum cuius basis ABRO & altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe cylindrum genitum

36 huius. ex rotatione ABRO circa AB, sicut rectangulum cuius basis AQ & altitudo circumferentia radii K nempe superficies genita ex rotatione AQ circa AB, ad rectangulum cuius basis AO & altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe circulum ex radio AO, quod demonstrare oportuit. ²

P R O P. 44. T H E O R E M A.

Sit figura quæcunque BCE cum rectangulo circumscripto ABED, quæ si librentur ex recta BE, dico momentum rectanguli ABED ad momentum figuræ BCE esse ut cylindrus factus ex revolutione rectanguli ABED circa BE, ad solidum rotundum factum ex revolutione BCE circa eandem BE. Sit rectæ AB parallela & æqualis quæcunque FH figuram BCE secans in G: bisecentur rectæ FH, GH, in punctis O, P; manifestum est momentum rectæ FH esse ad momentum rectæ GH in ratione composita ex ratione FH ad GH & ex ratione OH ad PH, hoc est in duplicata ratione FH ad GH seu ut circulus ex radio FH ad circulum ex radio GH, cumque hoc semper ita eveniat, & primæ & tertiæ semper

per sint eadem; erit, vt momenta omnium FH nempe momentum totius rectanguli ABED ad momenta omnium GH nempe momentum figuræ BCE, ita circuli omnes ex radiis



FH nempe cylindrus ex rotatione rectanguli ABED circa BE ad circulos omnes ex radiis GH nempe solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ BCE circa eandem BE, quod demonstrare oportuit.

PROP. 45. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente, si solida rotundæ orta ex rotatione rectanguli ABED & figuræ BCE circa BE secantur per rectam BE plano quod horizonti sit perpendiculari, & semisolidi ex recta BE librentur: dico momentum semisolidi ADEB esse ad momentum semisolidi BCE vt omnes cubi ab FH ad omnes cubos a GH: sint semicirculorum FH, GH, centra grauitatis O, P; manifestum est momentum semicirculi FH ad momentum semicirculi GH esse in ratione composita ex ratione semicirculi FH ad semicirculum GH nempe ex duplicata ratione FH ad GH & ex ratione OH ad PH seu FH ad GH; & ideo momentum semicirculi FH est ad momentum semicirculi GH in triplicata ratione FH ad GH, seu vt cubus ab FH ad cubum a GH, cumque

que hoc semper ita cūeniat, & primæ & tertiæ semper sint eadem; erit, ut momenta omnium semicircularum FH nempe momentum ipsius semisolidi B A D E ad momenta omnium semicircularum GH nempe momentum ipsius semisolidi BCE ut omnes cubi ab FH ad omnes cubos a GH, quod demonstrare oportuit.

Hoc Theorema ab acutissimo Geometra R. P. Stephano de Angelis nuper inventum poterit eodem modo demonstrari de qualibet solidi rotundi parte resecta a duobus planis in solidi rotundi axe se invicem secantibus.

Hæc dicta sint de quantitatum curvarum transmutatione & mensura in genere; nunc accedamus ad applicationem in casibus particularibus, quæ cetræ facilis est, potest enim nullo negotio ab Analysta perfici; sed nos varietati studentes, aliquando purè geometricè, aliquando purè analyticè, aliquando partim geometricè partim analyticè propositum demonstrabimus; hinc enim facillè percipiet sagax Lector quid in omni casu exhibito agendum sit.

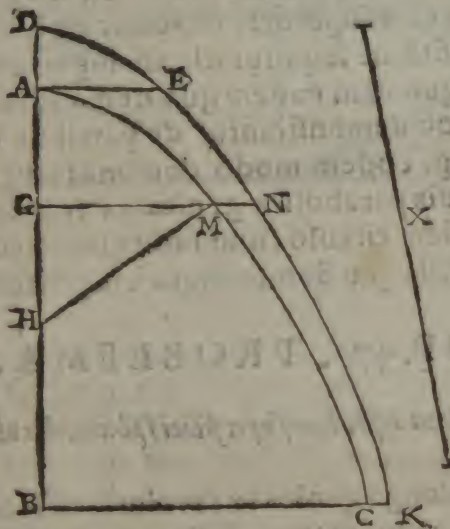
PROP. 46. PROBLEMA.

Invenire circulum æqualem superficiei conoidis Parabolicæ.

SIt conois parabolica genita ex reuolutione semiparabolæ ABC circa axem AB; cuius superficiei oportet invenire æqualem circulum. Producat BA in D ut AD sit quarta pars lateris recti, tangatque parabolam in vertice A recta AE æqualis dimidio lateris recti; & axe DB per E ducatur parabola DEK ordinatim applicatæ BC productæ occurrant in K; sitque X recta diameter quadrati æqualis segmento parabolico A E K B. dico rectam X esse radium circuli æqualis superficiei conoidis parabolicæ genitæ ex rotatione semiparabolæ ACB circa axem AB. ex quolibet puncto curvæ parabolicæ AC nempe M demittatur in axem ordinatim

ap.

applicata MG , quæ producatur donec exteriorē curvā
parabolicā DEK intersecet in N ; sitque GH recta æqualis
dimidio lateris recti, patet ex multorum demonstrationibus
rectam MH tangentem in puncto M normaliter secare. De-
inde ex doctrina parabolarum asymptotarum a Gregorio
a S. Vincētio & aliis tradita, manifestum est parabolas ABC ,



DBK , esse asymptotas; & ideo (ex eadem doctrina)
quadratum rectæ GN est æquale quadratis rectarum GM ,
 AE , hoc est, quadratis rectarum GM , GH ; illis autem qua-
dratis æquale est quadratum rectæ MH ; rectæ igitur HM ,
 GN , sunt æquales: cumque hoc semper fiat in omnibus pun-
ctis curvæ parabolicæ AMC ; manifestum est ex huius 3 seg-
mentum parabolicum $AEKB$ esse æquale superficiæ trunci
super curvā AMC sectæ a plano per rectam AB transeunte;
& in angulo semirecto cum parabola seu base trunci inclinā-
te; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum superficiæ
trunci

29
huius

trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei conoidis a rotatione curvæ parabolicæ AMC circa axem AB genitæ, quod demonstrandum erat.

Hinc etiam manifestum est centrum gravitatis superficiei conoidis parabolicæ idem esse cum centro æquilibrii segmenti parabolici $AENKB$ in axe AB : est enim segmentum $AENKB$ magnitudine & gravitate analogum cum superficiei trunci ex huius 3, & superficies trunci est magnitudine & gravitate analogum cum superficiei conoidis ex huius 24. Sed ex hac ipsa propositione sequitur illa analogia in magnitudine & gravitate, quoniam eadem quæ demonstrantur de integris eodem modo demonstrantur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur sectionem superficiei conoidis parabolicæ genitæ ex revolutione curvæ MC esse æqualem circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti $GNKB$, quo demonstrata est præsens propositio.

PROP. 47 . PROBLEMA .

Invenire circulum æqualem superficiei sphaeroidis oblongæ.

SIT sphaeroidis oblonga genita ex revolutione semiellipseos EFT circa axem longiorem ET ; cuius superficiei oportet invenire circulum æqualem. In verticibus T, E , ellipses tangent rectæ TR, ED , æquales semissi lateris recti: deinde centro G , vertice F per puncta D, R , ducatur ellipsis DFR ; & segmento elliptico $DFRTE$ fiat æquale quadratum, cuius diameter sit X . dico X esse radium circuli æqualis superficiei sphaeroidis oblongæ propositæ. producatue ellipsis DFR , donec axem ET productum intersecet in punctis Z, B ; facile patet rectas GZ, FG , esse semiaxes coniugatos semiellipseos BFZ . semielliptes tangentes in verticibus B, E, T, Z , ducantur rectæ BA, EC, TQ, ZY , omnes æquales rectæ FG , & iungatur recta $ACFQY$; ducantur quo.

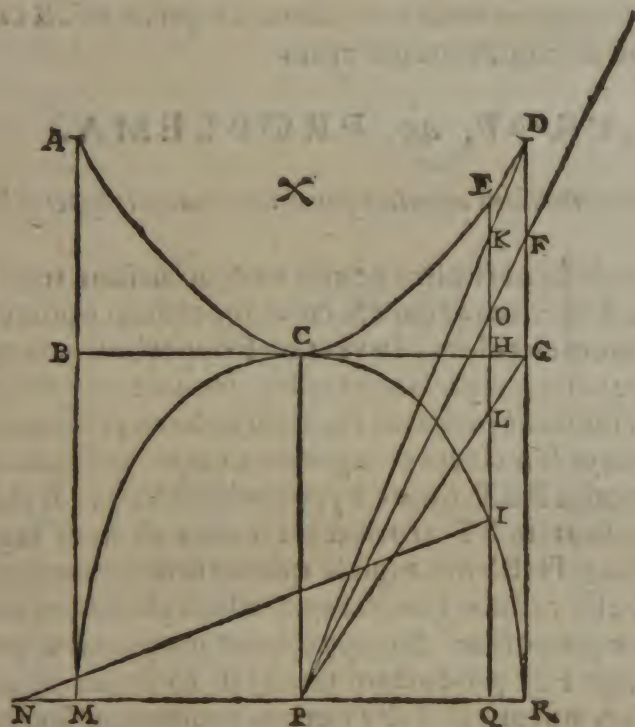
quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci erit X radius circuli æqualis superficiei sphæroidis genitæ a rotatione curvæ EFT circa axem ET , quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam patet quod superficies sphæroidis sit magnitudine & gravitate analoga cum segmento elliptico $EDFRT$, idem enim quod demonstratur de integris, non dissimili methodo demonstratur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur superficies genita ex rotatione curvæ FN æqualis circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti elliptici $FKPG$, quo demonstrata est præfens propositio; quod etiam in tribus sequentibus est intelligendum, cum eadem sit ratio huius & illarum, me enim tædet eadem semper repetere.

PROP. 48. PROBLEMA.

Invenire circulum æqualem superficiei sphæroidis latæ.

SIt sphærois lata genita ex rotatione semiellipseos MC R circa axem breviorē MR , cuius superficiei oportet invenire æqualem circulum. In verticibus M, R , ellipsem tangant rectæ MA, RD , æquales semissi lateris recti. Deinde centro P , vertice C , per puncta A, D , ducatur hyperbola ACD , & segmento hyperbolico $ACDRM$ fiat æquale quadratum cuius diameter recta X . dico X esse radius circuli æqualis superficiei sphæroidis latæ propositæ. Sit hyperbolæ asymptota PF rectam DR secans in F , sitque hyperbolam tangens in vertice recta BCG , & iungantur rectæ PD, PG . ex quolibet ellipseos puncto I in axem MR sit perpendicularis IQ , rectas CG, PD, PF, PG , intersecans in punctis H, K, O, L , item hyperbolam intersecans in E . Sit recta QN æqualis rectæ QK ; manifestum est (ex commentariis Francisci a Scotten in Cartesium pag. 214) rectam NI ellipsem tangentem in puncto I normaliter secare. quoniam PF est hyperbolæ



$recta\ EQ$ est æquale quadratis $rectarum\ HQ, OQ$, & qua-
 dratum $rectæ\ HQ$ æquale est quadratis $rectarum\ IQ, LQ$; &
 ideo quadratum $rectæ\ EQ$ æquale est quadratis $rectarum\ I$
 Q, LQ, OQ , hoc est, quadratis $rectarum\ IQ, KQ$, seu IQ, QN ,
 sed quadratum $rectæ\ IN$ æquale est eisdem quadratis; sunt
M 2 ergo

ergo æquales rectæ EQ, IN; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curvæ ellipticæ MCR, manifestum est ex huius segmentum hyperbolicum ACDRM esse æquale superficiæ trunci super curvâ ellipticâ MCR scilicet a plano per rectâ MR transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum superficiæ trunci, erit X radius circuli æqualis superficiæ sphaeroidis latæ genitæ ex rotatione curvæ ellipticæ MCR circa axem MR, quod demonstrandum erat.

PROP. 49. PROBLEMA.

Invenire circulum æqualem superficiæ conoidis hyperbolicæ.

Sit conois hyperbolica genita ex revolutione semihyperbolæ FST circa axem FS, cuius superficiæ oportet invenire æqualem circulum. In vertice F hyperbolam tangat recta FH æqualis semissi lateris recti. Deinde describatur hyperbola transiens punctum H, idem habens centrum nempe D & eundem semiaxem coniugatum nempe DE cum hyperbola proposita FST; sitque hyperbola descripta BHR ordinatim applicatam ST productam secans in R; & segmento hyperbolico FHRS fiat æquale quadratum, cuius diameter X dico X esse radium circuli æqualis superficiæ conoidis hyperbolicæ propositæ. Sit hyperbolæ propositæ asymptota DV, rectam FH productam secans in K, sitque hyperbolæ inventæ asymptota DY, FH etiam productam secans in C, & producat recta DH. Ex quolibet hyperbolæ propositæ puncto Q axi applicetur ordinatim recta QG, quæ producta rectas DH, DV, DY, intersecet in punctis Z, O, L, & hyperbolam inventam in puncto P; sitque GA æqualis rectæ GZ, manifestum est (ex Fran. a Schotten commentariis in Cartesium pag. 216.) iunctam rectam QA tangentem hyperbolam in puncto Q normaliter secare. Quoniam recta FK hyperbolam

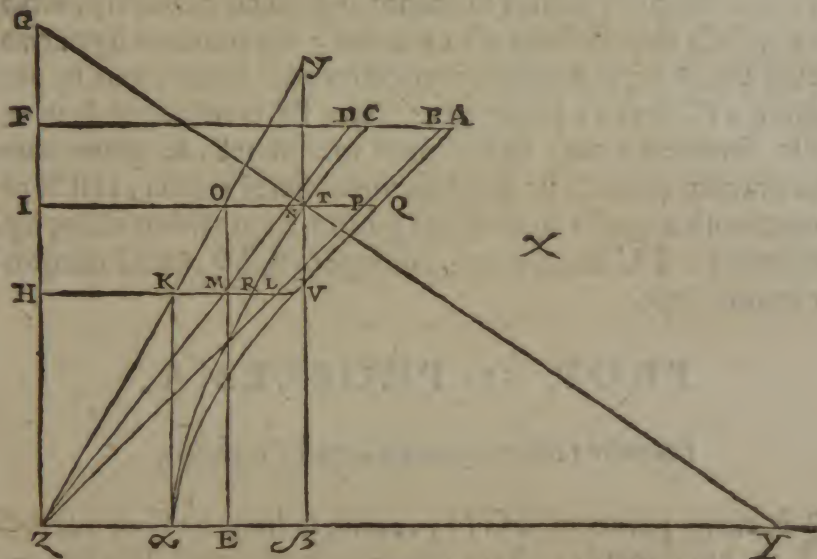
lia auferendo, quadratum rectę GP æquale est quadratis re-
ctarum GZ, GQ, hoc est, quadratis rectorum GA, GQ; his
autem quadratis æquale est quadratum rectę AQ, æquales
ergo sunt rectę GP, AQ; cumque hoc semper eveniat in om-
nibus punctis curvę hyperbolicę FQT, manifestum est ex hu-
ius 3 segmentum hyperbblicum FHRS æquale esse superfi-
ciei trunci super curua hyperbolica FQT sectę a plano per re-
ctam FS transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci
inclinante; & igitur cum quadratum rectę X sit duplum su-
perficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei co-
noidis hyperbolicę genitę ex rotatione curvę hyperbolicę
FQT circa axem FS, quod demonstrandum erat.

PROP. 50. PROBLEMA.

*Si curva hyperbolica rotetur circa axem coniugatum; inuenire
circulum aequale superficiei ab illa curva hyper-
bolica rotata genita.*

SIt curva hyperbolica αC , quę rotata circa axem suum
coniugatum FZ gignit superficiem; oportet huic super-
ficiei æqualem circulum inuenire. Sit curvę hyperbolicę αC
centrum Z, vertex α , asymptoton ZD: hyperbolam tangat in
vertice α recta αK æqualis semissi lateris recti eiusdem hyper-
bolę: sit recta HK rectę Z α parallella & æqualis, quę produ-
catur indefinite hyperbolam secans in R & eius asympto-
ton ZD in M; & in illa sumatur recta HV, cuius quadratum
æquale sit quadratis rectorum HR, HK: deinde centro Z ver-
tice α sit hyperbola αVA , quę producatur donec rectam FC
A parallelam rectę Z α interfecet in A; & segmento hyper-
bolico FA V αZ fiat æquale quadratum, cuius diameter X:
dico X esse radium circuli quęriti. Sit hyperbolę inuentę
asymptoton ZB rectam HV secans in L, & ex quolibet hy-
perbolę propolitę puncto T in vtrumque axem (si opus est)
pro-

productum demittantur perpendiculares $TI, T\beta$, sitque cur-
uam hyperbolicam normaliter secans in puncto T , recta $G\gamma$
vtrumque axem (si opus est) productum secans in punctis
 G, γ : producantur (si opus est) rectæ $T\beta, TI$, & rectam ZKY
intersecant in Y & O punctis; manifestum est ex loco citato



Francis. a Schooten rectas $\beta Y, \beta \gamma$, esse æquales; est autem,
vt $\beta \gamma$ ad βT seu EO , ita IT seu βZ ad IG ; & ideo ut $Y\beta$ ad OE
ita $Z\beta$ ad IG ; sed ut $Y\beta$ ad OE ita $Z\beta$ ad ZE seu IO ; sunt ergo
æquales rectæ GI, IO . Producat recta IT vt hyperbolæ in-
uentæ occurrat in Q & eius asymptoto in P , sitque eius in-
tersectio cum asymptoto hyperbolæ propositæ punctum N .
ex constructione quadratum rectæ HV (hoc est quadrata re-
ctarum HL, Za) æquale est quadratis rectarum HR, HK , seu
quadratis rectarum HM, HK, Za ; & ideo idem vtrinque au-
ferendo, relinquitur quadratum rectæ HL æquale quadratis
rectarum HK, HM : cumque rectæ IP, IN, IO , sint in eadem

ratione cum rectis HL, HM, HK; erit etiam quadratum rectæ IP æquale quadratis rectarum IN, IO; & idem quadratum Z æ utrinque addendo, erunt quadrata rectarum IP, Z æ (hoc est quadratum rectæ IQ) æqualia quadratis rectarum IO, IN, Z æ, hoc est quadratis rectarum IO, IT seu IG, IT, hoc est quadrato rectæ TG; sunt ergo æquales rectæ QI, TG; cumque hoc semper eueniat in omnibus punctis curuæ hyperbolice æ TC, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbolicum FA æquale esse superficiei trunci super curua hyperbolice æ TC sectæ a plano per rectam FZ transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitæ a rotatione curuæ hyperbolice æ TC circa axem coniugatum ZF, quod demonstrandum erat.

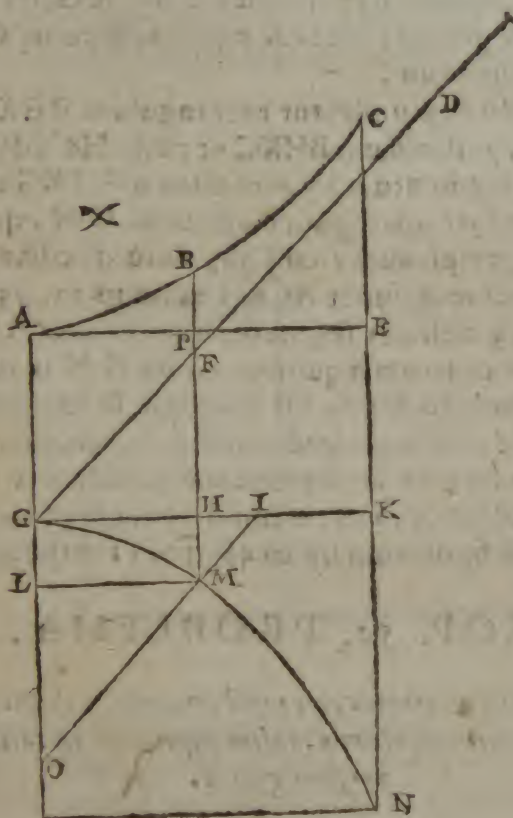
25
huius,

PROP. 51. PROBLEMA.

Inuenire rectam æqualem curuæ Parabolice.

Sit curua parabolica GN, verticem habens G & axem GO, cui oportet rectam inuenire æqualem. Producat axis GO in A, ut GA fiat æqualis semissi lateris recti, sitque GK recta parabolam tangens in vertice & NK axi parallela illi occurrens in K: deinde sit recta GD angulum rectum A GK bifariam diuidens, fiatque hyperbola AC verticem habens A, centrum G & asymptoton GD; producat recta NK donec hyperbolam secet in puncto C, sitque AE rectæ GK parallela: fiat tandem ut rectangulum AEKG ad segmentum hyperbolicum AGKC, ita recta GK ad rectam X; dico rectam X æqualem esse curuæ parabolice GN. Ex quolibet curuæ parabolice puncto M demittantur in rectas GO, GK, perpendiculares ML, MH, sitque recta OI curuam parabolicam normaliter secans in puncto M, & rectis GO, GK, occurrens

em G
cur
aque
Mella
um A
m h
eta N
et G
pina
s dno
olice
GK
boli
oc
s



equale esse quadratis rectarum AG , HF , vel ob angulos
 $\angle HGP$, $\angle HFG$, quadratis rectarum LO , GH , seu LO ,
 LM ; sed quadratum rectæ OM æquale est quadratis rectarum
 OL , LM ; & ideo rectæ OM , HB sunt æquales. Deinde ob si-
N
mili.

militudinem triangulorum HMI , LOM , est ut HM ad MI ita OL ad OM , seu GA ad HB ; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curvæ parabolicæ GN ; erit ex huius 2 rectangulum $AEKG$ ad segmentum hyperbolicum $ACKG$, ut recta GK ad curvam parabolicam GN ; erat autem ut rectangulum $AEKG$ ad segmentum hyperbolicum $ACKG$, ita recta GK ad rectam X ; & proinde recta X æqualis est curvæ GN , quod demonstrare oportuit.

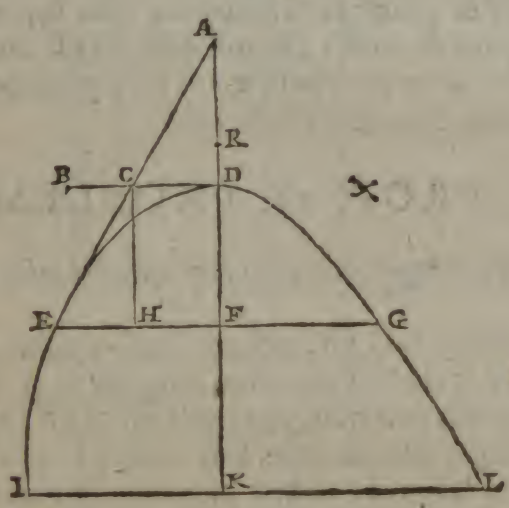
Eodem modo demonstratur rectangulum $PEKH$ esse ad segmentum hyperbolicum $BHKC$ ut recta HK ad curvam MN ; & proinde segmentum hyperbolicum $ACKG$ est magnitudine & gravitate analogum cum curva GN , quod etiam ex huius 2 est perspicuum; cumque detur facile truncus inferior cylindrici recti super $ACKG$ ex huius 21, 35 & 37 dabitur centrum gravitatis segmenti hyperbolici $ACKG$; & ideo innotescit centrum æquilibrii curvæ GN in recta GK : hinc quoque notatu digna est analogia in magnitudine & gravitate, quæ contingit inter curvam parabolicam, superficiem sphæroidis latæ & superficiem genitam a rotatione curvæ hyperbolicæ circa axem suum coniugatum, quæ cuius est ex sola figurarum huius 48, 50, 51 inspectione.

PROP. 52. PROBLEMA.

Si curva parabolica vertatur circa rectam, eam in vertice tangentem, invenire circulum æqualem superfici ei ex tali conversione genitæ.

Sit curva parabolica IED , cuius vertex D , rotata circa rectam BD eam in vertice tangentem, ut gignat superficiem rotundam: oportet huic superfici ei invenire circulum æqualem. Sit curvæ parabolicæ latus rectum quadruplum rectæ DR , & eius axis DK . Ex puncto I in axem DK sit recta perpendicularis IK , & axe transversa RD (cui etiam æqualis

lis sit axis coniugatus) fiat hyperbola DGL rectam IK pro:
ductam secans in L: deinde semi hyperbolæ DKL fiat æqua:
le quadratum, cuius diameter X: dico X esse radium circuli
quæsit. Ex quolibet curvæ parabolicæ puncto E in axem
demittatur perpendicularis recta EF, quæ producta hyper:
bolam interfecet in puncto G; sitque parabolam tangens in
puncto E recta EA tangenti DB occurrens in C & axi pro:



ducto in A, sitque CH æqualis & parallela rectæ DF. Mani:
festum est FA duplam esse rectæ DA, & ideo EF est dupla
rectæ CD, est ergo EH æqualis rectæ HF. rectangulum RF
in FD est æquale quadrato rectæ DF una cum rectangulo R
DF, atque rectangulum RDF æquale est quadrato EH quo:
niam RD est quarta pars lateris recti; & ideo quadratum
rectæ CE (quod æquale est quadratis rectarum EH, HC =
DF) æquale est rectangulo RF in FD, sed quadratum rectæ
FG eidem rectangulo est æquale, & proinde rectæ EC, FG,
inter se sunt æquales, cumque hoc semper fiat, patet ex hu:
N 2 jus

25
quius. Jus 4 semihyperbolam DKL esse æqualem superficiei trunci super curua parabolica DEI sectæ a plano per rectam DB transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & ideo, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitæ a rotatione curuæ parabolicæ circa rectam DB , quod demonstrandum erat.

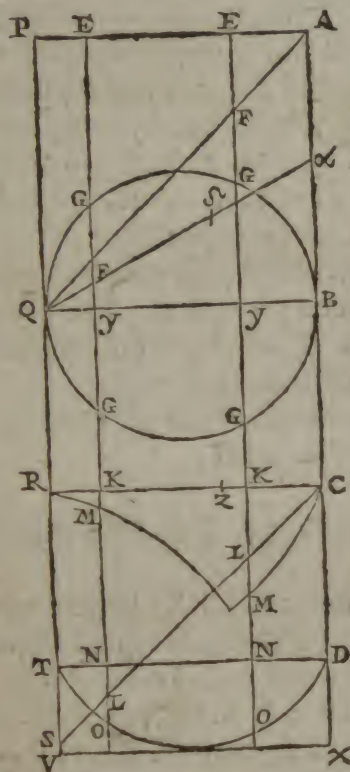
Ex hac propositione patet semihyperbolam DKL esse magnitudine & gravitate analogam cum superficiei: ex hac, antecedente & huius 38 non difficile est inuenire centrum gravitatis curuæ parabolicæ vel eius portionis cuiuscunque datæ, quod admonuisse sufficiat.

PROP. 53. PROBLEMA.

Inuenire centrum gravitatis semicylindri recti obliquè secti.

Sit circulus $B G Q G$ cylindri basis, cuius diameter $B Q$, sitque recta $B A$ circum tangens in A semicylindri altitudo æqualis rectæ $B Q$, perinde enim est cum omnes semicylindri super eadem base sint analogi, quæ producat ad partes B indefinitè, sitque ei parallela & indefinitè longa, recta $P Q$; fiant etiam AP, CR, DT , parallelæ diametro $B Q$, & ducatur $A Q$ recta reliquis se habentibus vt in figura. Sit figura CRM talis naturæ, vt (ducta recta quacunque $EYKM$ parallela rectæ $P Q$) EY sit ad FY vt GY ad KM : figura CRM est analoga magnitudine & gravitate semicylindro; atque huius figuræ seu semicylindri centrum æquilibrii ita inuenitur: sint CR, RS , æquales reliquis se habentibus vt in figura, fiatque figura DOT talis naturæ, vt (ducta recta quacunque $EYKMNO$) EY sit ad KL vt KM ad NO ; & figuræ DOT circumscribatur rectangulum DV ; sit deinde vt figura CRM ad figuram DOT ita EY seu RC ad CZ , manifestum est ex huius 37 esse centrum æquilibrii figuræ CMR : figura autem

tem D O T innotescit hoc modo: datur rectangulum DV,
quoniam DT est æqualis BQ & DX seu TV est quarta conti-
nue proportionalium, quarum prima est EY & secunda di-
vidua rectę BQ; deinde NO est semper quarta continue pro



portionalium, quarum prima est EY & secunda GY, quod
sic probo: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ.

$$EY: FY = QY: GY: KM$$

$$EY: KL = BY: KM: NO$$

$$EY^2: BY \times YQ = GY^2: KM \times GY: KM \times NO$$

& ideo $EY^2: GY^2:: GY: NO$, est igitur
GY

$GY = EY \times NO$; & proinde posita EY prima & GY secunda, erit NO quarta continue proportionalium, & ideo figura DOT est ad rectangulum DV , vt conois parabolica (cuius basis est circulus $BGQG$) ad cylindricum parabolicum illi conoidi circumscriptum, cumque dentur proportio conoidis parabolicae ad cylindricum sibi circumscriptum & rectangulum DV , dabitur quoque figura DOT , & ideo punctum quoque Z ; & ideo datur in semicylindri base eius centrum æquilibrii; & proinde semicylindri centrum gravitatis erit in data perpendiculari ad basem e centro æquilibrii excitata, atque idem gravitatis centrum est in recta Qa ducta inter punctum Q & a medium punctum rectæ AB ex puncto B basi BGQ perpendicularis, supposita nempe cylindrum esse sectum a plano baseos planum in recta PQ secante; sit igitur vt RC ad CZ ita Qa ad ad , erit δ semicylindri centrum gravitatis, quod inueniendum erat.

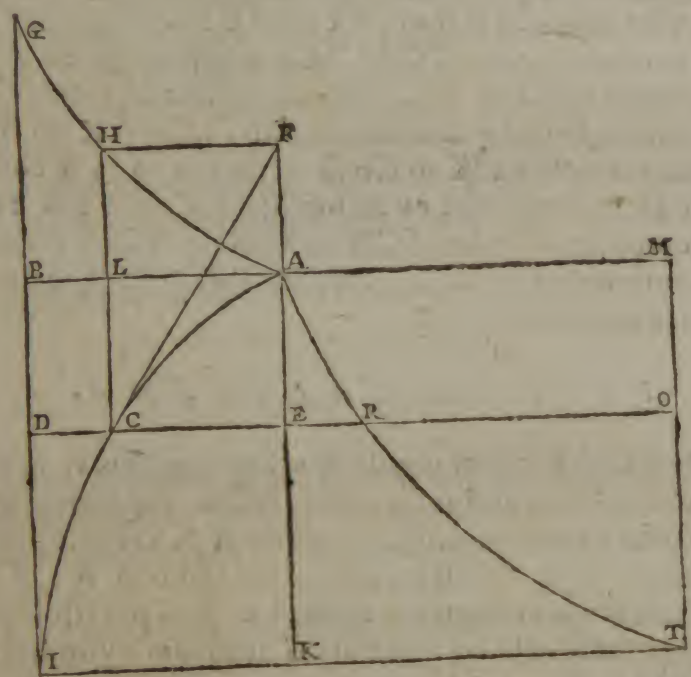
In huius 62 docebimus aliam methodum inueniendi proportionem inter DV & DOT .

PROP. 54. THEOREMA.

Sit parallelogrammum $ABIK$, sitque curva ACI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque DE parallela & æquali rectæ AB curvam secante in C) ratio AB ad EC sit multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q . dico parallelogrammum $ABIK$ esse ad figuram $ACIK$ vt P ad Q . producat^{ur} recta IB in G & iungatur curua AHG talis naturæ, vt (ducta recta CF tangente curuam ACI in quolibet puncto C & ductis parallelis EC , FH) recta CH sit æqualis & parallela rectæ EF ; manifestum est ex huius 7 rectam AE ad FE , seu LC ad HC esse vt P ad Q , cumque hoc semper fiat, evidens est figuram $ACIB$ esse ad figuram $ACIGH$ vt P ad Q ; atque ex huius 11 figura $ACIGH$ est æqualis figuræ $ACIK$, & ideo figura $ACIB$ est ad figuram $ACIK$ vt P ad Q , & com-

ponendo parallelogrammum $ABIK$ est ad figuram $ACIK$ ut $P \times Q$ ad Q quod demonstrandum erat.

Si P sit minor quam Q erit $ACIK$ quælibet ex parabolis infinitis, si vero P sit maior quam Q , erit $ACIK$ quodlibet ex trilineis infinitis. Ex hac quoque propositione manifestum est parallelogrammum $ABIK$ esse ad figuram $ABIC$ ut $P \times Q$ ad P ; quod etiam ita innotescit, quoniam ratio AB ad EC



est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q , hoc est ratio AB ad AL est multiplicata rationis BI ad LC in eadem ratione P ad Q , erit conuertendo, BI ad LC multiplicata rationis AB ad AL in ratione Q ad P ; & ideo ex ipsa propositione, parallelogrammum $ABIK$ est ad figuram $ABIC$ ut $P \times Q$ ad P , quod demonstrandum erat.

PROP.

PROP. 55. THEOREMA.

Eisdem positis, quæ in antecedente: dico rationem figure ACIK ad figuram ACE esse multiplicatam rationis IK ad CE in ratione $P \times Q$ ad P. Ex antecedere ABIK est ad ACIK, ut $P \times Q$ ad Q, eodẽ modo ALCE est ad ACE ut $P \times Q$ ad Q, & ideo ABIK est ad ACIK ut ALCE ad ACE, & permutando ABIK est ad ALCE ut ACIK ad ACE, at ratio ABIK ad ALCE est composita ex ratione AK ad AE & ex ratione IK ad CE, & proinde ratio ACIK ad ACE componitur ex eisdem rationibus; at ratio IK ad CE est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q, & conuertendo, ratio AK ad AE est multiplicata rationis IK ad CE in ratione Q ad P, & componendo, ratio composita ex rationibus AK ad AE & IK ad CE (nempe ratio figuræ ACIK ad figuram ACE) est multiplicata rationis IK ad CE in ratione $P \times Q$ ad P, quod demonstrare oportuit.

PROP. 56. THEOREMA.

Supposito ABIK rectangulo & reliquis positis ut in antecedente, si super figuris ABIK, ACIK, supponantur cylindrici recti, cuius utriusque altitudo AB, item supposito cylindricum super ACIK secari a plano ipsi basi ACIK seminormali, & eam secante in recta AK: dico paralleloipedum super ABIK esse ad inferiorem truncum cylindrici super ACIK ut $4P \times 2Q$ ad Q. Supponatur planum secans cylindricum super ACIK produci ut secet etiam paralleloipedum, manifestum est truncum eius inferiorem esse prisma triangulare paralleloipedum dimidium. Deinde sit rectangulum AMTK cum inscripta linea ART talis proprietatis, ut (sumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineas ART, ACl, secante in punctis R, C, item

item ducto per puncto E plano ipsi AK normali & inferiores cylindricorum truncos secante in triangulis reſt angulis iſoſcelibus quorum baſes ſunt DE, CE) OE ſit ad RE ſicut triangulum ſuper DE ad triangulum ſuper CE. Patet triangulum ſuper DE eſſe ad triangulum ſuper CE ſeu OE ad RE in duplicata ratione DE ad CE, atque ratio DE ad CE eſt multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q; & ideo ratio OE ad RE eſt multiplicata rationis AK ad AE in ratione 2P ad Q, cumque hoc ſemper fiat ubique ſumatur punctum E, patet ex huius 54 reſt angulum AM TK eſſe ad figuram AR TK ut $2P + Q$ ad Q; at OE ſemper eſt ad RE, ut triangulum ſuper DE, nempe communis interſectio plani normalis ad AK cum priſmate triangularem, ad triangulum ſuper CE, nempe communem ſectionem eiſdem prioris plani cum trunco inferiore cylindrici ſuper ACIK; antecedentes quoque quantitates, nempe omnes reſt OE inter ſe, & omnia triangula ſuper DE inter ſe, ſunt æquales; & ideo ut omnes reſt OE nempe reſt angulum AM TK ad omnes RE nempe figuram AR TK ita omnia triangula ſuper DE nempe priſma triangulare ad omnia triangula ſuper CE nempe inferiorem truncum cylindrici ſuper ACIK; & proinde priſma eſt ad truncum ut $2P + Q$ ad Q, & ideo duplum priſmatis nempe parallelipedum ſuper ABIK eſt ad inferiorem truncum cylindrici reſti ſuper ACIK ut $4P + 2Q$ ad Q, quod demonſtrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelipedum ſuper ABIK eſt ad cylindricum eiſdem altitudinis ſuper ACIK ut $P + Q$ ad Q, hoc eſt ut $4P + 2Q$ ad $\frac{4PQ + 2QQ}{P + Q}$, & proinde parallelipe-

dum ſuper ABIK eſt ad eiſdem cylindrici truncum ſuperiorem ut $4PP + 6PQ + 2QQ$ ad $3PQ + QQ$; atque talis truncus ſuperior idem eſt cum trunco eiſdem cylindrici inferiore reſecto a plano baſem ſecante ſeminormaliter in reſta BI, & ideo huius quoque trunci ad parallelipedum patet ratio,

O

tio,

tio, nempe ut $3PQ + QQ$ ad $4PP + 6PQ + 2QQ$.

PROP. 57. THEOREMA.

POsito paralleloppedo & cylindrico habere altitudinē
 AK & reliquis ut in antecedente; si cylindricus rectus
 super ACIK secetur a plano ad basem seminormali & eam
 secante in recta AB. Dico paralleloppedū super ABIK esse
 ad inferiorem truncum cylindrici super ACIK in ratione
 $P + 2Q$ ad Q . Sit quadratum AMTK cum inscripta linea A
 RT talis naturæ, ut (sumpto ad libitum puncto E & ducta
 recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineam ART secante
 in puncto R, item ducto per punctum E plano ipsi AK nor-
 mali, cuius intersectio cum trunco inferiore est rectangulum
 LAEC) AE sit ad RE sicut BA ad CE. Patet ex constructio-
 ne rationem AE ad RE esse multiplicatam rationis AK ad A
 E in ratione P ad Q, & componendo, ratio AK ad RE, hoc
 est ratio KT ad RE, est multiplicata rationis AK ad AE in ra-
 tione P + Q ad Q; & ideo quadratum AMTK est ad figuram
 ARTK ut P + 2Q ad Q, at ut ABIK ad AMTK ita IK vel AB
 ad TK seu AK, & ideo rectangulum ABIK est ad figuram AR
 TK in ratione composita ex ratione P + 2Q ad Q & ex ratio-
 ne AB ad AK. Quoniam AE est ad RE ut BA ad CE, erit re-
 ctangulum AE in CE nempe AECL æquale rectangulo AB
 in RE, cumque hoc semper fiat, erit cylindricus super ARTK
 habens altitudinem AB æquale inferiori trunco cylindrici
 super ACIK; & ideo paralleloppedum super ABIK cum alti-
 tudine AB est ad cylindricum super ARTK seu truncum in-
 feriolem cylindrici super ACIK ut basis ABIK ad basem AR
 TK, hoc est in ratione composita ex ratione P + 2Q ad Q &
 ex ratione AB ad AK, at paralleloppedum super ABIK cum
 altitudine AB est ad paralleloppedū super ABIK cū altitudi-
 ne AK ut AB ad AK; & proinde paralleloppedū super ABIK
 cum altitudine AK est ad truncum inferiorem cylindrici su-
 per

25
 huius.

per ACIK vt $P + 2Q$ ad Q , quod demonstrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum super ABIK est ad cylindricum eiusdem altitudinis super ACIK vt $P + Q$ ad Q , hoc est vt $P + 2Q$ ad $\frac{Q^2 + 2QQ}{P + Q}$; & ideo parallelopipedum

super ABIK altitudinis AK est ad truncum superiorem cylindrici super ACIK eiusdem etiam altitudinis AK vt $PP + 3PQ + 2QQ$ ad QQ ; atque talis truncus superior idem est cum inferiore eiusdem cylindrici trunco resecto a plano basem seminormaliter secante in recta IK, & ideo eiusdem parallelopedi ad hunc truncum inferiorem eadem est ratio.

Ex huius 29, 56 & 57 manifestum est centrum æquilibrij figure ACIK ita dividere rectam IK, vt pars versus I sit ad partem versus K in ratione $3P + Q$ ad $P + Q$, item centrum æquilibrij eiusdem ACIK ita dividere AK, ut pars versus A sit ad partem versus K in ratione $P + Q$ ad Q .

In duabus præcedentibus, etiam si facilitatis gratia supponatur ABIK rectangulum, conclusiones tamen non minus veræ sunt de parallelogrammo quolibet; nullo enim negotio demonstrantur ex æqualitate & analogia in magnitudine & gravitate truncorum super rectangulis & eorum figuris cum truncis super parallelogrammis quibuscunque & eorum figuris; quod etiam in sequentibus de figuris longitudine infinitis intelligi velim.

PROP. 58. PROBLEMA.

Sit AEF angulus rectus sitque curva ADF talis naturæ, vt (ducta recta DC ad libitum perpendiculari ad AE) ratio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad AC in ratione numeri imparis cuiuscunque ad numerum proxime minorem; oportet inuenire rectam æqualem curvæ ADF. v. g. sit ratio EF ad CD multiplicata rationis AE ad AC in ratione 3 ad 4; sitque (ope huius 2) ut recta AE ad curuam AF ita rectan-
O 2 gulum

256^l4; & proinde trilineum GOLI est $\frac{1024^l3}{1875b^2} + \frac{128^l4}{625b^3}$

625b⁴, & ideo recta AE est ad curuam AF vt *bd* seu rectan-

256^l5, & ideo recta AE est ad curuam AF vt *bd* seu rectan-

3125b⁴

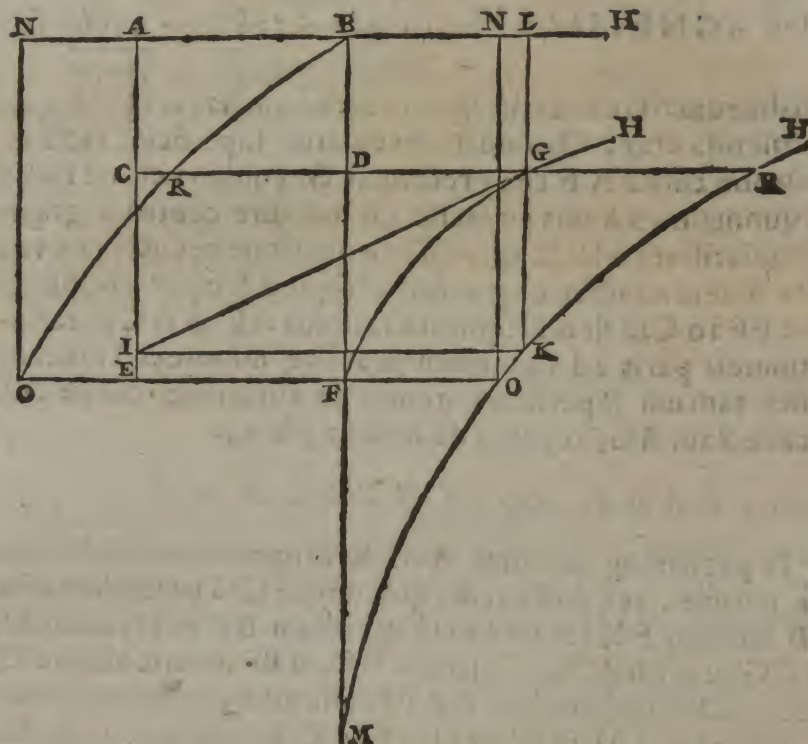
gulum AGNE ad *bd* + *cd* — $\frac{1024^l3}{1875b^2} - \frac{128^l4}{625b^3} - \frac{256^l5}{3125b^4}$ seu

mixtilineum AGLE. datur igitur recta æqualis curvæ AF, quæ inuenienda erat. Quomodo inueniatur superficies facta ex rotatione curvæ AF circa rectam AG. euidentis est ex huius 43. quoniam ex huius 57 facile est inuenire centrum gravitatis mixtilinei AGLE. quod si in æquatione reducta, ex vna parte inuenta fuisset non x sed x^2 (quod semper accidit, si ratio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad AC in ratione numeri paris ad numerum proxime minorem) inuenta fuisset tantum superficies genita ex rotatione curvæ AF circa rectam AG, vt patet ex huius 23 & 43.

P R O P. 59. T H E O R E M A.

Sit parallelogrammum ABFE, sitque curva FGH talis naturæ, vt (ducta recta quacunque CG parallela rectæ AB curuam FH secante in G & rectam BF in D) ratio AB ad CG sit multiplicata rationis BD ad BF in ratione P ad Q. dico parallelogrammum ABFE esse ad figuram longitudine infinitam HAEFGH vt Q — P ad Q. producat recta BF in M & ducatur curva MKH talis naturæ, vt (ducta recta GL tangente curuam FGH in quolibet puncto G & ductis parallelis G C, KI) recta GK sit æqualis & parallela rectæ CI: manifestum est ex huius 7 rectam AC ad CI vel L G ad GK esse vt P ad Q, cumque hoc semper fiat, euidentis est figuram HFBH esse ad figuram HFMH ut P ad Q, atque ex huius 11 figura HFMH est æqualis figuræ HAEFH, & ideo figura HAEFH est ad figuram HFBH vt Q ad P, & per conuersionem rationis, HAEFH est ad parallelogrammum

mum ABFE ut Q ad Q—P, & conuertendo ut parallelo-
 grammum ABFE ad figuram HAEFH ita Q—P ad Q, quod
 demonstrandum erat.



PROP. 60. THEOREM A.

Supposito ABFE rectangulo & reliquis positis sicut in antecedente; si super figuris ABFE, HAEFH, supponantur cylindrici recti, cuius prioris altitudo AB, secundi autem altitudo infinita, item supposito cylindricum super HAEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante in recta AE: dico parallelopipedum super ABFE esse ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH ut $2Q - 4P$ ad

111

ad Q. consideratis considerandis demonstratio non differt
ab huius 56.

PROP. 61. THEOREMA.

Eisdem suppositis cylindricis, qui in antecedente; sed
cum altitudine BF, & supposito cylindricum super H
AEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante in
recta AH: dico parallelipedum super ABFE esse ad infe-
riorem truncum cylindrici super HAEFH in ratione $2Q-P$
ad Q. Sit primò P minor quam Q, sitque ut AB ad CG ita B
D ad DR protractam versus A E, & compleatur quadratum
NBFO ex parte A E, item ex omnibus punctis R imaginetur
curua BRO: patet ex constructione rationem BD ad DR esse
multiplicatam rationis B D ad B F in ratione P ad Q, & diui-
dendo, ratio DR ad B F, nempe ratio D R ad F O, est multi-
plicata rationis BD ad B F in ratione $Q-P$ ad Q, & ideo qua-
dratum NBFO est ad figuram B R O F in ratione $2Q-P$ ad 54
huius, Q, at ut ABFE ad NBFO ita EF seu AB ad OF seu BF, & ideo
rectangulum ABFE est ad figuram BROF in ratione compo-
sita ex ratione $2Q-P$ ad Q & ex ratione AB ad BF. Quoniam
est ut AB ad CG ita BD ad DR, erit rectangulum AB in DR
æquale rectangulo BD in CG, at rectangulum AB in DR est
communis intersectio cylindrici recti super BROF altitudi-
nem habentis AB cum plano secante super R D ad basem
normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem
prioris plani producti cum trunco inferiore cylindrici super
HAEFH; cumque hæ intersectiones semper contingant esse
æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici su-
per HAEFH equalem esse cylindrico super BROF altitudi-
nem habenti AB; & ideo parallelipedum super ABFE
cum altitudine AB est ad cylindricum super BROF seu trun-
cum inferiorem cylindrici super HAEFH ut basis ABFE ad
basem BROF, hoc est in ratione composita ex ratione $2Q-P$
ad

ad Q & ex ratione AB ad BF , at parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine AB est ad parallelopipedum super eadem $ABFE$ cum altitudine BF ut AB ad BF ; & proinde parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super $HAEFH$ ut $2Q - P$ ad Q , quod & c.

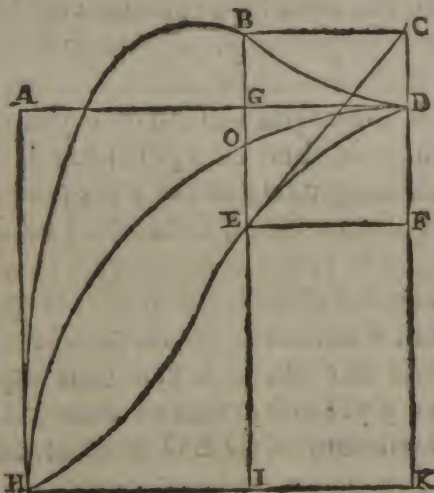
Quod si P sit maior quam Q ; sit ut AB ad CG ita BD ad CR protractam versus LK , & compleatur quadratum $NAEO$ ex parte LK , item ex omnibus punctis R imaginetur curua ORH : patet ex constructione rationem BD ad CR esse multiplicatam rationis BD ad BF in ratione P ad Q , & sumendo excessum antecedentis supra consequentem ad consequentem, ratio BF ad CR nempe ratio EO ad CR est multiplicata rationis BD ad BF seu AC ad AE in ratione $P - Q$ ad Q ; & ideo quadratum $NAEO$ est ad figuram longitudine infinitam $HAEOH$ ut $2Q - P$ ad Q , at ut $ABFE$ ad $NAEO$ ita EF seu AB ad EO seu BF , & ideo rectangulum $ABFE$ est ad figuram $HAEOH$ in ratione composita ex ratione $2Q - P$ ad Q , & ex ratione AB ad BF . quoniam est ut AB ad CG ita BD ad CR , erit rectangulum AB in CR æquale rectangulo BD in CG , at rectangulum AB in CR est communis intersectio cylindrici recti super $HAEOH$ altitudinem habentis AB cum plano secante super CR ad basem normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem prioris plani cum trunco inferiore cylindrici super $HAEFH$; cumque hæ intersectiones semper contingant esse æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici super $HAEFH$ æqualem esse cylindrico super $HAEOH$ altitudinem habenti AB , & ideo parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine AB est ad cylindricum super $HAEOH$ seu truncum inferiorem cylindrici super $HAEFH$ ut basis $ABFE$ ad basem $HAEOH$, hoc est in ratione composita ex ratione $2Q - P$ ad Q & ex ratione AB ad BF , at parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine AB est ad parallelopipedum super eadem $ABFE$ cum altitudine BF ut AB ad BF ; & proinde parallelopipedum super $ABFE$ cum
alti-

altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super
HAEFH vt 2 Q-P ad Q, quod demonstrare oportuit.

Ex his & huius 29, 37, non difficile est colligere centrum
æquilibrii figuræ HAEFH ita assignari in recta AH, nempe
AB esse ad distantiam centri æquilibrii à puncto A vt 2 Q-4P
ad Q-P; item eiusdem figuræ centrum æquilibrii ita diuide-
re rectam AE ut pars versus A sit ad partem versus E in ra-
tione Q-P ad Q.

PROP. 62. THEOREMA.

Si quadrans circuli KDOH & recta DA parallela radio
HK, sitque curva DEH talis naturæ, vt (ducta recta qua-
cunque GI parallela & æquali rectæ DK curvam circulearem



secante in O & curvam DEH in E) ratio GI & ad EI sit tripli-
cata rationis GI ad OI. dico quadrantem circuli KDOH esse
ad figuram KDEH vt 4 ad 3, hoc est, curvam DEH diuidere
quadrantē circuli in ratione 3 ad 1. ducatur curva HBD talis

E

na

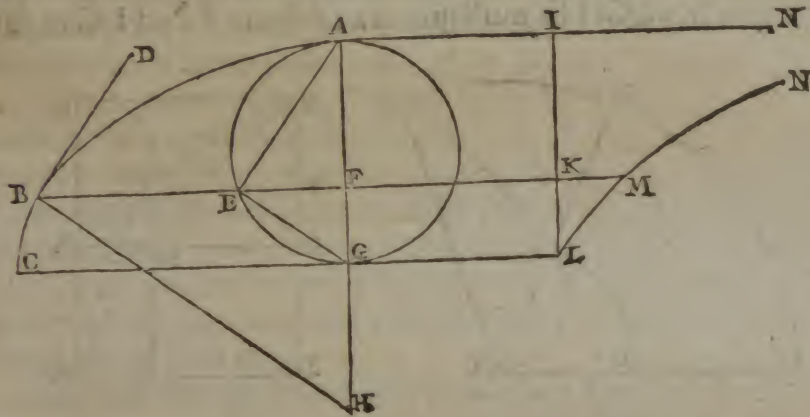
naturæ; ut (ducta recta EC tangente curvam HED in quolibet puncto E & ductis parallelis EF, BC) recta EB sit æqualis & parallela rectæ CF ; manifestum est ex huius 7 rectam CF seu BE esse triplam rectæ EO , cumque hoc semper fiat, evidens est figuram $HBDE$ esse triplam figuræ $HODE$, atque ex huius 11 figura $HBDE$ est æqualis figura $HEDK$; & proinde figura $HEDK$ est ad figuram $HODE$ in ratione 3 ad 1, diuidit ergo curva HED quadrantem circuli in ratione 3 ad 1, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio GI ad EL esset quintuplicata rationis GI ad OL , curva HED quadrantem circuli diuideret in ratione 5 ad 3; si autem septuplicata, in ratione 7 ad 5; & sic in genere, si ratio GI ad EL sit multiplicata rationis GI ad OL in ratione cuiuscunque numeri imparis ad unitatem, curva HED diuidet quadrantem circuli in ratione eiusdem numeri imparis ad numerum imparem proxime minorem, quæ omnia demonstrantur sicut hoc theorema. Eodem prorsus modo demonstratur nō solum illa Vallisij interpositio qua spatium cissoïdale mensurat in libro de cycloide, sed etiam omnes fortassis aliæ quæ imaginari possunt, supposita primæ interpositæ figuræ mensura. Quod si ratio GI ad EL sit multiplicata rationis GI ad OL in ratione numeri cuiuscunque paris ad unitatem, facile daretur figuræ $KHED$ quadratura ope huius 54, ut docet Vallisius in sua Arithmetica infinitorum; & ideo innotescit in recta DK centrum æquilibrij figuræ $DEHK$ ope huius 37. Hinc etiam evidens est DEF eandem semper habere rationem ad DEO quam habet $DEHK$ ad $DEHO$, quod summopere notandum, nam (præter multa alia pulcherrima problemata) si secetur conois parabolica plano ad axem parallelo, ex data eiusdem ab axe distantia, dabitur huius ope utrumlibet conoidis segmentum.

PROP.

PROP. 63. THEOREMA.

Sit curvæ cycloidis primariæ semiffis CBA, eius basis CG; circulus genitor AEG basem tangens in puncto G a diametro GA. dico curvam CBA duplam esse rectæ AG. sit AILG quadratum, sitque figura NAGLN talis naturæ, ut (ducta recta quacunque FM parallela rectæ AI) ratio AI vel AG ad FM sit subduplicata rationis AF ad AG: manife-



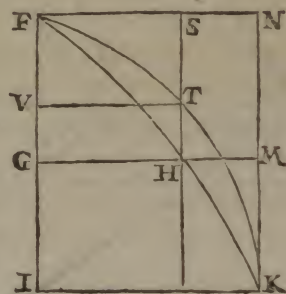
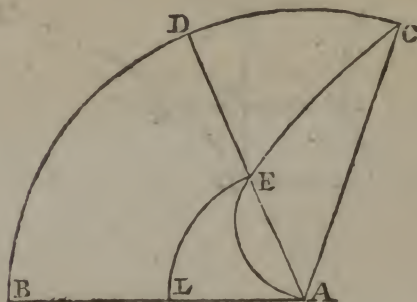
stum est ex huius 59 figuram infinitam NAGLN esse duplam quadrati AILG. per F diametri AG punctum quodlibet ducatur BM rectæ AI parallela, cycloidi & curvæ LN occurrens in punctis B, M, secans circulum & rectam IL ut in figura; iungantur rectæ AE, EG, & illis parallelæ DB, BH: ex huius 8 patet BD tangere cycloidem in puncto B & BH contingenti esse perpendicularem. ut BF ad BH ita EF ad EG seu FA ad AE, atque ratio AF ad AG duplicata est rationis AF ad AE, & ideo ratio AF ad AG est duplicata rationis BF ad BH, sed ratio AF ad AG est etiam duplicata rationis AG ad FM, & ideo ut BF ad BH ita AG vel FK ad FM, cumque semper ita sit, patet ex huius 2 rectam AG esse ad curvam ABC in

P, 2 ra-

ratione subdupla, nempe vt quadratum $AILE$ ad figuram $NAGLN$, quod demonstrare oportuit.

PROP. 64. THEOREMA.

Sit circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, vt (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio AC ad AE sit multiplicata rationis CB ad DB in ratione P ad Q , sit angulus rectus FIK & curva FHK talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GH parallela rectæ IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ra-



tionem P ad Q ; patet ex huius 14 rectangulum $FNKI$ figuræ FIK circumscriptum esse ad figuram $FHKI$ vt arcus BC ad axem figuræ spiralis AEC evolutæ, & proinde ex huius 54 arcus BC est ad axem figuræ AEC evolutæ ut $P \times Q$ ad Q , sit vt $P \times Q$ ad Q ita arcus BC ad rectam FI , cui sit normalis recta IK æqualis rectæ AC , sitque figura $FHKI$ talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GH parallela rectæ IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad $P \times Q$: dico figuram $FHKI$ esse spatium spirale AEC evolutum. Ex rectæ FI quolibet puncto G sit rectæ FI normalis GH occurrens curvæ FHK in H , sitque rectæ GH æqualis AE producta in D . arcus BC est ad axem figuræ AEC evolutæ nempe FI

vt

ut $P \times Q$ ad Q ; eodemq; modo arcus EL est ad axem figuræ AE euolutæ ut $P \times Q$ ad Q ; & ideo ut arcus BC ad rectam FI ita arcus LE ad axem figuræ AE euolutæ, & permutando, ut arcus BC ad arcum LE ita recta FI ad axem figuræ AE euolutæ, at ratio arcus BC ad arcum LE est composita ex ratione arcus BC ad BD & ex ratione arcus BD ad arcum LE seu rectæ CA ad rectam EA , & ideo recta FI est ad axem figuræ AE euolutæ in ratione composita ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA ; sed ratio CA ad EA est multiplicata rationis BC ad BD in ratione P ad Q , & conuertendo, componendo & rursus conuertendo, ratio AC ad AE seu IK ad GH est multiplicata illius rationis (quæ componitur ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA) nempe rationis rectæ FI ad axem figuræ AE euolutæ in ratione P ad $P \times Q$, sed ratio IK ad GH est multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad $P \times Q$; & proinde FG est axis figuræ AE euolutæ, suntque EA, GH , æquales; & ideo (cum hoc semper fiat) manifestum est ex huius 14 & eius consecutario figuram $FHKI$ esse figuram AEC euolutam, quod demonstrandum erat.

Figura $FHKI$ est illa descripta in huius 54, cumque poterit inueniri recta illam tangens in puncto dato ope huius 7, poterit quoque (ex consecutario huius 18) recta duci spiralem AEC tangens in puncto dato: sæpissimè etiam (ut patet ex huius 58) inuenitur recta æqualis curvæ FHK , quæ etiam æqualis est spirali curvæ AEC .

Ope huius 15 vel 16 nullo negotio probatur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut $2P \times Q$ ad Q .

P R O P. 65. T H E O R E M A.

Sit circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, ut (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio DE ad BA sit multiplicata rationis CD ad CB

CB in ratione P ad Q. sit FN ε qualis rectæ BA, itē angulus
 rectus FNK & curva FK talis naturæ, vt (ducta recta quacun-
 que HM parallela rectæ FN) ratio HM ad FN sit multiplicata,
 rationis KM ad KN in ratione P ad Q. cōpleatur rectangulum
 FNKI producaturque MH in G; & ducatur recta DA, ita vt
 DE sit ε qualis rectæ HM, & ideo EA ε qualis erit rectæ
 GH. Ratio DE ad BA seu HM ad FN est multiplicata ratio-
 nis CD ad CB in ratione P ad Q, atque ratio HM ad FN est
 multiplicata rationis KM ad KN seu IG ad IF in eadem ratio-
 ne P ad Q; & ideo ut CD ad CB ita IG ad IF, estque vt IK ad
 GH ita AC ad AE, & ideo (ex huius 14) vt rectangulum
 FK ad figuram FHKI, hoc est (ex huius 54) ut P \star Q ad P ita
 arcus BC ad axem figuræ AEC evolutæ, qui sit FI reliquis
 manentibus ut prius, sitq; curva FTK talis naturæ, vt (ducta
 recta quacunq; STH parallela rectæ FI) IF sit ad ST ut figura
 FHKI ad figuram FHG. Dico figuram FTKI esse spatium spi-
 rale AEC evolutum. Manifestum est constructione rectam
 FI esse axem figuræ AEC evolutæ; eodemque modo (vt
 prius ostensum est) demonstratur rectangulum FH esse ad
 figuram inscriptam FHG ut arcus LE ad axem figuræ AE
 evolutæ. Ratio FI seu axis figuræ AEC evolutæ ad axem fi-
 guræ AE evolutæ est composita, ex ratione rectæ FI ad ar-
 cum BC seu figuræ FHKI ad rectangulum ANKI, ex ratione
 arcus BC ad arcum BD seu rectæ IF ad rectam FG (quod sic
 probo, vt CD ad CB ita IG ad IF, & diuidendo, & con-
 uertendo, vt CB ad BD ita IF ad FG) seu rectangu-
 li FNKI ad rectangulum FNM G, ex ratione arcus BD
 ad arcum LE seu rectæ DA ad rectam EA nempe rectæ
 GM ad rectam GH seu rectanguli FNM G ad rectangulum
 FSHG, & ex ratione arcus EL ad axem figuræ AE evolutæ
 seu rectanguli FSHG ad figuram FHG; ac patet rationem
 figuræ FHKI ad figuram FHG componi ex eisdem rationi-
 bus, & ideo vt FI ad axē figuræ AE evolutæ ita figura FHKI
 ad figuram FHG, hoc est vt FI ad ST vel FV, est igitur FV
 axis

axis figuræ AE evolutæ, cumque ordinatim applicata VT sit æqualis rectæ AE, & hoc semper fiat, ubicumque sumatur punctum E, manifestum est (ex consecratario 14 huius) figuram FTKI esse spatium spirale AEC evolutum, quod demonstrare oportuit.

Ope huius 7 potest duci tangens ad curvam FTK, cum sit e numero earum quas Cartesius appellat geometricas, & proinde potest per huius 2. comparari cum suo axe vel base, cui si reperiatur rectæ æqualis, erit eadem rectæ æqualis curvæ AEC; ut cunque potest semper duci recta tangens curvam AEC in puncto dato ope consecrarii huius 18.

Ex huius 15 & 57 nullo negotio invenitur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut $Q^2 \div 3 PQ \div 2 P^2$ ad $2 P^2$.

Supposito telluris motu, linea descripta à graui descendente versus centrum terræ A esset CEA, si modo ratio P ad Q sit dupla; de qua magna orta est controuersia inter celeberrimos Mathematicos R. P. P. Stephanum de Angelis & Ioan. Baptistam Ricciolum, quæ fortasse dirimetur, si consideret doctissimus Ricciolus vires impulsuum esse in directâ proportionem cum velocitatibus, quibus appropinquat corpus mobile ad corpus resistens, abstrahendo ab omni alio motu; mihi enim nihil apparet evidentius; neque ullus est architecturæ militaris peritus, qui præcedens axioma non supponit in tractando de tormentis bellicis. Quod ad controuersiam partem purè geometricam, existimo nullum nunc dubitare, quod graue cadens in centrum terræ tempore sex horarum semper sit extra semicirculum. Evidens est calculum R. P. Stephani de Angelis (dialogo primo pag. 19.) esse legitimum; demonstratio autem D. Manfredi (qua contrarium ostendere conatur pag. 17.) in hoc est erronea, quod tacitè supponat (ponendo CHA semicirculum) grauis descensum ad centrum terræ durare sex horas; nam centrum attingit (supponendo Riccioli observationes & terræ semidiametrum pedum 25870000) tempore minorum 21 se-

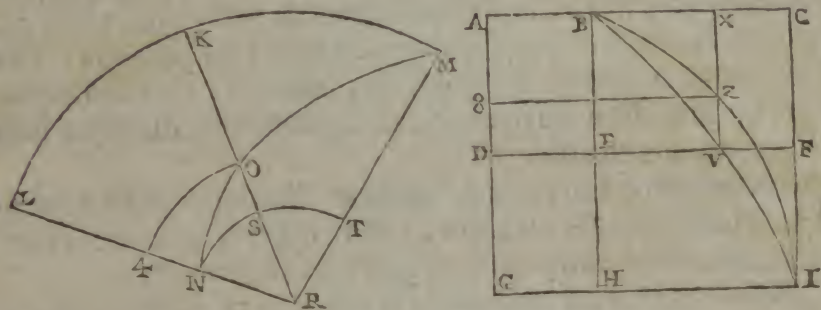
culis.

cundorum 53; neque in his ullius est momenti siue motus fiant ab intrinseco vel extrinseco, geometria enim & statica abstrahunt ab omni causa physica, quippe incerta & non euidente.

PROP. 66. THEOREMA.

Sit circuli sector LRM, eodemque centro arcus NT similis arcui LM, sitque spiralis NOM talis naturæ, ut (ducta recta quacunque RSO) ratio rectæ SO ad rectam TM sit multiplicata rationis arcus LK ad arcum LM in ratione P ad Q. sit BC æqualis rectæ MT, BH ad libitum, item angulus rectus CBH, & curva BVI talis naturæ, ut (ducta recta quacunque EV parallela rectæ BC) ratio EV ad BC sit multiplicata rationis BE ad BH in ratione P ad Q; compleatur rectangulum BCIH, & sit rectangulum ABHG cuius latus AB æquale rectæ TR: ex huius 54 patet rectangulum BCIH esse ad figuram BVIH ut $P \times Q$ ad Q; ducatur recta DEVF, ita ut EV sit æqualis rectæ OS, & ideo RO est æqualis rectæ DV. ratio EV ad HI seu OS ad MT est multiplicata rationis BE ad BH in ratione P ad Q, sed ratio OS ad TM est multiplicata rationis LK ad LM in eadem ratione P ad Q, & ideo ut BE ad BH ita LK ad LM, & ut DV ad GI ita RO ad RM, & ideo ex huius 14, ut ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad axem figuræ MONR euolutæ: sit ut ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad rectam BH reliquis in figura ACIG se habentibus ut prius; sitque curva BZI talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum XZV parallela rectæ BH) figura ABVIG sit ad figuram ABVD ut recta BH ad rectam XZ vel A8. Dico figuram ABZIG esse spatium spirale R N O M euolutum. Manifestum est ex constructione rectam AG esse axem figuræ RNOM euolutæ; eodemque modo (ut prius ostensum est) demonstratur rectangulum AV esse ad figuram ABVD ut arcus 4O ad axem figuræ RNO euolutæ. Ratio AG seu axis figuræ RNOM euolutæ

luta ad axem figuræ RNO evolutæ est cõposita, ex ratio-
ne axis figuræ RNOM evolutæ ad arcum LM seu figuræ AB
VIG ad rectangulum ACIG, ex ratione arcus LM ad arcum
LK seu rectæ IC ad rectam CF vel rectanguli ACIG ad re-
ctangulum ACFD, ex ratione arcus LK ad arcum 4O seu re-
ctæ KR ad rectam OR nempe DF ad DV vel rectanguli AC
FD ad rectangulum AXVD, & ex ratione arcus 4O ad axem



figuræ RNO evolutæ seu rectanguli AXVD ad figuram AB
VD; at perspicuum est rationem figuræ ABVIG ad figuram
ABVD componi ex eisdem rationibus, & ideo ut figuræ
ABVIG ad figuram ABVD seu vt AG ad A8 ita AG axis fi-
guræ RNOM evolutæ ad axem figuræ RNO evolutæ, qui
igitur est A8; cumque ordinatim applicata 8Z sit æqualis re-
ctæ OR, & hoc semper fiat vbicunque sumatur punctum O,
manifestum est (ex Consecratio 14 huius figuram ABZIG
esse figuram RNOM evolutam, quod demonstrare oportuit.

Curva BZI est ex earum numero quas Cartesius appellat
geometricas, & igitur per huius 7 potest duci recta eam
tangens in puncto dato, potest quoque comparari cum re-
cta ope huius 2, & proinde curva quoque NOM illi æqualis,
cique duci tangens in puncto dato.

Ex huius 15 & 56 non difficile erit demonstrare (posita
ratione HI ad HG vt P ad Y) sectorem RLM esse ad figuram

Q

RNOM

$$\text{RNOM vt P ad } \frac{Y^2}{P} + \frac{PQ}{2P+Q} + \frac{2PQY}{P^2+2PQ+Q^2}$$

Notandum demonstrationem 65 & 66 huius esse maximè vniuersalem, sed prælo currente non memini illam debito loco inferere.

Hic examinauimus tria spiraliū genera; quorum primū idem est cum illis duobus, quæ mensurauit R. P. Stephanus de Angelis in libro suo de Spiralibus & in fine lib. 5. de parabolis; secundum quoque idem est cum illis duobus, quæ dimensus est in libro de Spiralibus inuersis; tertium etiam excogitauit idem Mathematicus sagacissimus, illudque mihi nuper communicauit.

Summopere notandum omnem figuram posse concipi sicut inuolutam, & methodo nostra inuenietur eadem euoluta; hinc enim non parū augmentetur geometria.

Adeo fertilis est hæc nostra methodus, vt difficile fere sit aliquid proponere illi omnino impervium; quod ut experiamur, soluantur duo illa problemata quæ proposuit Renatus Franciscus Slusius in prop. 8. de infinitis hyperbolis R. P. Stephani de Angelis. Sit AB, b ; BD, a ; sitque secundum tenorem quæstionis, vt b^2 ad $ba - a^2$ ita a^2 ad $\frac{ba^3 - a^4}{b^2}$ quadra-

tum rectæ DC, & ideo (ex huius 54) summa omnium quadratorum ab infinitis DC erit $\frac{b^3}{20}$, at summa totidē quadrato-

rum rectæ AB est b^3 ; cum itaque hæ quadratorum summæ sint duplæ truncorum inferiorum, qui secantur in cylindricis rectis super ACB, AEFB, a plano basi seminormali, erit (ex huius 23) ut b^3 ad $\frac{b^3}{20}$ nempe vt 20 ad 1, ita cylindrus ex

rotatione AEFB circa AB ad solidum rotundum ex rotatione ACB circa eandem AB. Sit secundum propositum vt in eiusdem de infinitis hyperbolis prop. 10. sitque ratio AB ad BD

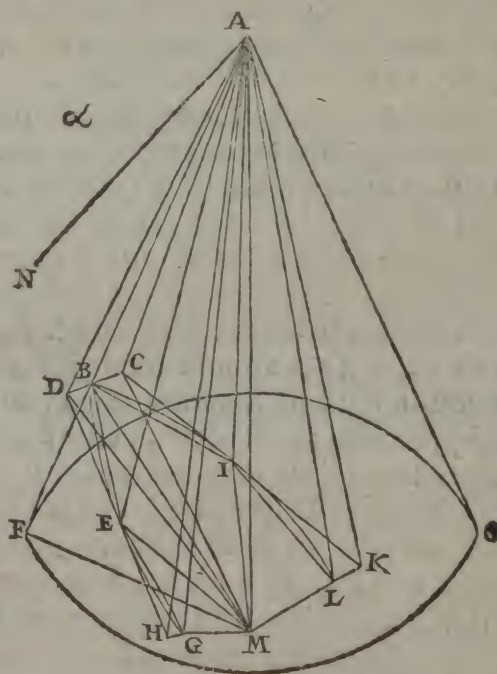
BD multiplicatâ rationis AD ad DC in ratione P ad Q: sitque ratio AB ad BD multiplicata rationis EA ad DO in ratione P ad Q, manifestum est EOB esse curuam in huius 54 descriptam; & ideo cubus ex latere EA vel AB est ad inferiorem truncum cylindrici recti super EOBA resecti à plano basem seminormaliter secante in recta EA ut $P^2 \times 3PQ \times 2Q^2$ ad Q^2 ; est autem ut EA ad DO ita ex positione AD vel KH ad DC; & ideo rectangulum EA in DC æquale est rectangulo DO in KH, cumque hoc semper fiat, manifestum est cylindricum super ACB (cuius altitudo EA) æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super EOBA resecti à plano basem seminormaliter secante in recta EA, & ideo ut $P^2 \times 3PQ \times 2Q^2$ ad Q^2 ita EABF ad ACB.

Hæc problemata particularia a me selecta sunt tanquam difficiliora & maioris momenti inter geometrarum inuenta, ultra quædam a me nunc primum soluta; totus namque archimedis tractatus de sphaera & cylindro facile demonstratur ex huius 3 ad modum huius 46 & aliquot sequentium; liber de conoidibus spheroidibus & tota Lucæ Valerii doctrina ex huius 21; tota Guldini, Ioannis de laFaille & Andreae Tacquet doctrina ex huius 35 & aliquot sequentium: fateor tamen me nullo modo potuisse inuenire rationem inter curuam ellipticam vel hyperbolicam & rectam, etiam si in hoc tractatulo multi diuersi sint modi illas examinandi; ita ut facile credam hanc rationem esse non Analyticam & vno gradu esse superiorem illam inter circulum & diametri quadratum, sed hoc demonstratu non est adeo facile. Non prætendo hanc methodum inseruire resolutioni omnium problematum irregularium, quæ infinita sunt numero & difficultate, qualia præsertim sunt illa de corporum & superficieum sectione irregulari a planis, vel aliis superficiebus, inter quæ tamen sequens exhibeo satis pulchrum, placet enim miscellanea quædam non prorsus inutilia hic adiungere.

Q 2 PROP.

PROP. 67. THEOREMA.

Sit conus rectus AFO, cuius axis AM, qui secetur a duobus planis AML, AMG, quorum intersectiones cum conici superficie sint rectæ AL, AG; seceturque adhuc idem conus AFO a plano utcumq; efficiente cum superficie conici communem sectionem GEBIL curuam; ita ut ab his sectionibus



excavetur a cono pyramis quædam conica ALMGEBI cuius vertex A & basis figura BILMGEB contenta a tribus planis ALM, AMG, MGE BIL, & superficie conica AGE BIL; ex
axis

axis puncto M trium planorum communi sectione in latus
coni AF sit perpendicularis recta MF. Dico pyramidem (cu-
ius basis est planum æquale superficiæ conicæ AGEBIL &
altitudo MF) æqualem esse pyramidi conicæ ALMGEBIL.
Si dictæ pyramides non sint æquales, sit earum differentia α ;
& pyramidi conicæ inscribatur pyramis AMGEBIL constans
ex pyramidibus triangularibus MGEA, MEBA, MBIA, MI-
LA; eidem quoque pyramidi conicæ circumscribatur alia
pyramis constans ex pyramidibus triangularibus MHDA,
MDCA, MCKA, ita ut differentia pyramidis inscriptæ & cir-
cumscriptæ sit minor quam α . Manifestum est pyramidis MH-
DA altitudinem esse MF, ex suppositione enim triangulum
HDA conum tangit, & ideo normalis ex M ad HDA in rectâ
contactus seu latus coni normaliter cadit: eodem modo
probatur MF esse altitudinem, ex vertice M, omnium reli-
quarum pyramidum triangularium, e quibus constatur pyra-
mis circumscripta, & ideo pyramis, cuius basis æqualis est
omnibus triangulis AHD, ADC, ACK, & altitudo MF,
æqualis est pyramidi circumscriptæ, & proinde maior pyra-
mide conica, sed maior etiam est pyramide cuius basis est
planum æquale superficiæ conicæ AGEBIL & altitudo MF,
quoniam eandem cum illa habens altitudinem, basem habet
maiores, quippe illi (dum conuexa existit) circumscriptâ.
Deinde pyramis triangularis MGEA (posita vertice M) mi-
norem habet altitudinem quam MF, quoniam eius basis ca-
dit intra superficiem coni, eodem modo omnes pyramides
triangulares pyramidem inscriptam componentes minorem
habent altitudinem quam MF, & ideo pyramis (cuius alti-
tudo MF & basis æqualis basibus omnium pyramidum trian-
gularium pyramidem inscriptam componentium) maior est
pyramide inscripta, sed hæc pyramis minor est pyramide
basem habente planum æquale superficiæ conicæ AGEBIL
& altitudinem MF, quoniam eandem habens altitudinem
basem habet minorem, nempe illi dum conuexa existit in-
scriptam,

scriptam, & ideo pyramis inscripta multo minor est eadem pyramide basem habente planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudinem MF, sed pyramis inscripta etiam minor est pyramide conica; pyramis igitur inscripta minor est pyramide conica & minor etiam pyramide conicam superficiem basem habente, pyramis verò circumscripta utraque harum pyramidum demonstrata est maior, & ideo maior est differentia inter pyramidem circumscriptam & inscriptam quam inter pyramidem conicam & pyramidem quæ superficiem conicam pro base habet; sed differentia inter pyramidem circumscriptam & inscriptam est minor quam α , & proinde differentia inter pyramidem conicam & pyramidem (quæ superficiem conicam pro base habet) est multo minor quam α , quod est absurdum, ponitur enim α differentia inter dictas pyramides; non ergo differunt pyramis conica AMGEBIL & pyramis cuius basis est superficies plana equalis conicæ superficiei AGEBIL & altitudo recta MF, & ideo æquales sunt, quod demonstrandum erat.

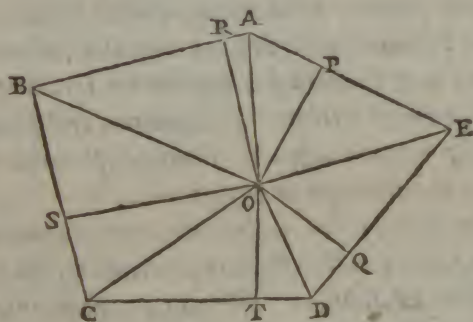
Ex vertice coni A in basem pyramidis conicæ MGE BIL (si opus est) productam demittatur perpendicularis recta AN; manifestum est ex hoc Theoremate MF esse ad AN ut basis pyramidis conicæ MGE BIL ad superficiei conicæ portionem AGEBIL.

P R O P. 68. T H E O R E M A.

Si in rectilineo quocunque aquilatero assignetur punctum, & ab illo puncto in omnia rectilinei latera demittantur perpendiculares rectæ; erit rectangulum ex semisse summa perpendicularium & perimetro rectilinei ad rectilineum, ut numerus laterum rectilinei ad unitatem.

SIt rectilineum æquilaterum ABCDE: à puncto O intra rectilineum demittantur in omnia rectilinei latera perpen-

pendiculares rectæ OR, OS, OT, OQ, OP. dico rectangulū ex
 semissæ summæ perpendicularium & ambitu rectilinei esse
 ad rectilineum vt numerus laterum ad vnitatem. Ex puncto
 O diuidatur rectilineum in triacula AOB, BOC, COD,
 DOE, EOA, quorum triangulorum bases ex suppositione
 sunt inter se æquales. Triangulum AOB est æquale rectangu-
 lo ex semisse perpendicularis OR & base AB, cumque omnia
 rectilinei latera sint æqualia rectæ AB, erit rectangulum ex
 semisse perpendicularis OR & ambitu rectilinei ad rectan-
 gulum ex semisse perpendicularis OR & recta AB seu trian-
 gulum AOB, vt numerus laterum rectilinei ad vnitatem, eo-
 dem modo in quolibet ex reliquis triangulis, vt rectangu-
 lum ex semisse perpendicularis ex trianguli vertice O in ba-
 sem demissæ & ambitu rectilinei ad idem triangulum, ita nu-



merus laterum rectilinei ad vnitatem; cumque omnia trian-
 gula simul sint æqualia ipsi rectilineo, & omnia dicta rectan-
 gula sint æqualia rectangulo ex semisse summæ perpendicu-
 larium & ambitu rectilinei; erit vt vna antecedentium nem-
 pe numerus laterum ad vnā consequentium nempe vnita-
 tem, ita omnes antecedentes nempe rectangulum ex semis-
 se summæ perpendicularium & ambitu rectilinei ad omnes
 con-

consequentes nempe ipsum rectilineum, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Hinc sequitur (si in rectilineo æquilatere quocunque assignentur duo puncta & ab eisdem ad omnia rectilinei latera ducantur perpendiculares) perpendiculares ab vno puncto demissas æquales esse perpendiculis ex altero puncto demissis.

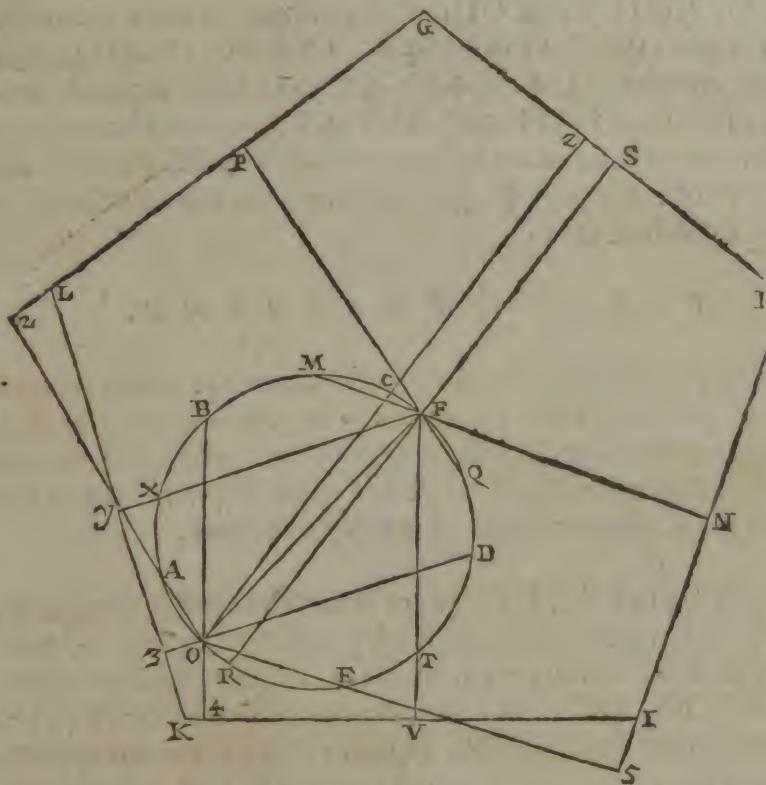
PROP. 69. THEOREMA.

Si circuli circumferentia diuidatur in partes quotcunque æquales & numero impares, & a quolibet peripheriæ puncto ad omnes eiusdem diuisiones rectæ ducantur: si circulus diuidatur in tres partes æquales, erit summa primarum æqualis ultimæ; si in quinque, erit summa primarum & ultimæ æqualis summe secundarum; si in septem, erit summa primarum & tertiæ æqualis summe secundarum & ultimæ: si in nouem, erit summa primarum, tertiæ & ultimæ æqualis summa secundarum & quartarum; atque ita deinceps in infinitum.

Dicimus autem rectas primas esse illas, quæ ducuntur ad diuisiones ex utraque parte puncto assignato proximas; secundas, illas rectas quæ ducuntur ad diuisiones primis ex utraque parte succedentes; tertias, quæ secundis succedunt, &c; rectam vero ultimam, illam quæ ducitur ad diuisionem à puncto assignato remotissimam.

Sit circuli circumferentia ABCDE diuisa in partes quotcunque æquales in punctis A, B, C, D, E, sitq; O quodlibet punctum in circumferentia; à quo ad omnes diuisiones ducantur rectæ OA, OE, OB, OD, OC: dico summam primarum & ultimæ nempe $OA + OE + OC$ esse æqualem summe secundarum nempe $OB + OD$. Ex puncto O ducatur
cir.

circuli diameter OF , & per punctum F ducantur rectæ OA ,
 OB , OC , OD , OE , parallelæ QFP , FTV , RFS , FXY , MFN ,
 & quoniam rectæ OA , OB , OC , OD , OE , efficiunt inter se an-
 gulos æquales, igitur rectæ QFP , FTV , RFS , FXY , MFN ,
 efficiunt inter se etiam angulos æquales: centro igitur F de-



scribatur polygonum æquilaterum & æquiangulum GHI
 KL , cuius latera bifariam & ad angulos rectos secantur a
 rectis per F ductis; & proinde eadem latera normaliter se-
 centur a rectis per O ductis, prioribus quippe parallelis, &
 ideo rectæ FP , FS , FN , FV , FY , sunt æquales rectis OZ , OZ ,
 R O_5

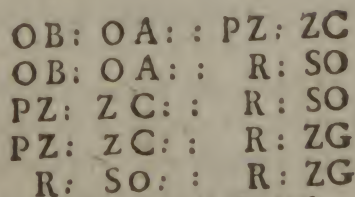
O_3, O_4, O_3 , ex antecedente; atque recta O_2 superat rectam FP excessu AO , & recta O_5 superat rectam FN excessu OE , & recta OZ superat rectam FS excessu CO ; igitur rectæ $O_2 + O_5 + OZ$ superant rectas $FP + FN + FS$ excessu $AO + OE + OC$; recta quoque FY superat rectam O_3 excessu OD , & recta FV superat rectam O_4 excessu OB ; & ideo $FY + FV$ superat $O_3 + O_4$ excessu $OD + OB$; cumque in serie quantitarum $O_2 + O_5 + OZ, FP + FN + FS, FY + FV, O_3 + O_4$, summa extremorum $O_2 + O_5 + OZ + O_3 + O_4$ sit æqualis summa mediorum $FP + FN + FS + FY + FV$; erit differentia inter primam & secundam nempe $OA + OE + OC$ æqualis differentia inter tertiam & quartam nimirum $OB + OD$, quod demonstrandum erat.

P R O P. 70. T H E O R E M A.

Si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit, e quibus in axem ex utraque parte rectæ perpendiculares demittantur; erit ea ab una parte axis æqualis illis ab altera parte: quod si ab utraque parte in duobus punctis illam secet; erunt similiter duæ ab una parte simul æquales duabus ab altera parte simul.

SIt parabola $PABCG$ quam secet circulus in punctis P, A, B, C , quorum nullum est parabolæ vertex. a punctis P, A, B, C , demittantur in axem eadem ordinatim applicatæ AH, BX, MC, PN : dico ordinatim applicatas ex una parte axis nempe AH, PN , æquales esse ordinatim applicatis ex altera parte axis nimirum rectis BX, CM . Producantur rectæ PA, BC , donec concurrant in D ; eritque rectangulum BDC æquale rectangulo ADP , & igitur rectæ parabolam $PABCG$ tangentes parallelæ rectis DC, DP , æquales erunt, quæ igitur se mutuo interfecent in parabolæ axe, facientes cum eadem ordinatim applicatis triangula isoscelia; & igitur DP, DC , illis parallelæ faciunt cum eisdem ordinatim

Sit R latus rectum parabolæ



R 2 CM

CM tertiam & PN seu GN quartam; & ideo summa primæ & quartæ AH. + PN est æqualis summæ secundæ & tertie BX + MC, quod demonstrandum erat.

Alii sunt huius theorematis casus, sed in reliquis nulla restat difficultas, modo hic intelligatur.

Hoc theorema inseruit cognitioni æquationis cubicæ & quadratoquadraticæ, præcedens autem æquationibus amphibologiis, & sinuum compositioni; qui autem desiderat plenam analyseos & æquationum doctrinam, expectet absolutissimum D. Caroli Renaldinii opus de Resolutione & Compositione Mathematica, quod nunc est sub prælo.

Hucusque continuavimus speculationes purè geometricas; ut autem videant philosophi geometriam non esse adeo abstractam & inutilem sicut vulgo existimatur, statuimus difficultates quasdam physicomathematicas ex principiis opticis geometricè enodare.

DE SIDERVM SCINTILLATIONE

& magnitudine apparente.

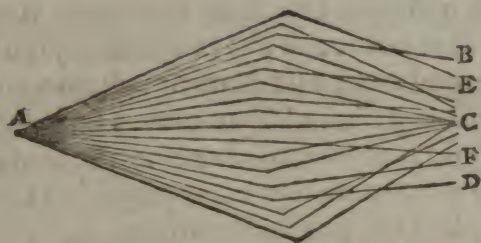
EX optica nostra promota evidens est primo, omnem visionis confusionem provenire ex radiorum vnus punctis in retinæ sensibilem particulam incidentia; secundo, quo maior fuerit illa retinæ particula eo maiorem esse visionis confusionem.

PROPOSITIO I.

Oculus humanus non potest esse Geometricè perfectus.

SIt punctum aliquod radians A; si oculus humanus esset geometricè perfectus, congregaret omnes radios puncti radiantis A in pupillam incidentes in vnum retinet punctum geometricum nempe C: ut autem hoc fieret, deberet ut oculus esset figuræ alicuius geometricæ, sed figuræ

gurae geometricae in indiuisibili consistunt; & proinde in corporibus humanis, quae quotidianis mutationibus sunt obnoxia, locum habere non possunt, ideoque oculus



cum talis figurae esse non possit non est geometricae perfectus, & igitur radios à puncto A provenientes non congregat in vnicum punctum C, sed in aliquam superficiem nempe BCD.

PROPOSITIO 2.

Propositum sit inquirere, quid efficiat haec oculi imperfectio.

Possimus commodissime naturam assimulare iaculatori perito, qui sagittas à puncto A in scopum C iaculatur; omnibus enim suis sagittis valde exiguum scopum C attingere non potest, sed aliquando in parva quadam distantia à scopo nempe in B sagittam omittit: unde euenit ut post multas iaculatas sagittas, circiter scopi C punctum medium reperiantur sagittae quam plurimae sicut sylvula quaedam densissima; at in paulo maiore distantia à scopo C nempe spatijs E, F, rarior omnino inuenitur ista sylvula; & in extremis B, D, videtur rarissima: ita vt generaliter dici possit sylvulam quo magis ad C acceditur esse densiorem, & quo minus esse rariorem. Quod si adhuc multas alias iaculetur

letur sagittas, densior evadet hæc sylvula & versus medium & versus extremitates, sed semper quo magis acceditur ad C erit densior & quo minus rarior. Eodem modo natura radijs lucidis conatur punctum geometricum C attingere, sed ob suam imbecillitatem seu oculi imperfecti- nem cogitur à scopo sæpissime aberrare, hoc tamen sicut peritus iaculator euincens, ut radorum sylvula quo magis acceditur ad medium eo sit densior, & quo minus eo sit rarior: manifestum etiam est quo plures sunt radii, radorum sylvulam eo esse densiorem, ita tamen ut semper densior sit versus medium quam versus extremitates. Hinc colligimus, si punctum radians A debiliter radiet, ita ut vix percipiatur à sensu densior seu media pars sylvulæ C, reliquas sylvulæ partes rariores & minus illustratas non omnino percipi: quod si fortior sit radiatio, rariores etiam sylvulæ partes nempe E & F perceptibiles devenient, quoniam illustrantur sensibiliter ex suppositione: quod si fortissima sit radiatio, rarissima etiam & extremæ partes, nempe B, D, sensibiles fient: ita ut generaliter dici possit, quò fortior sit radiatio eo maiorem apparere sensui communi sylvulam radorum, seu particulam retinæ ab unius puncti radiis depictam.

PROPOSITIO 3.

Quo lucidius est obiectum, eo confusior est eius visio.

Quo lucidius est obiectum, eo fortior sit radiatio unius eius puncti radiantis nempe A; & quo fortior fuerit radiatio, eo maior apparet sensui communi pars retinæ à radijs puncti A illustrata, per huius 2; & proinde per 2 petiti- nem maior apparet visionis confusio: cumque hoc eodem modo demonstrari possit de omnibus obiecti punctis, manifestum est propositum. Quod si pars retinæ ab unius puncti radius illustrata sit minimum sensibile, distinctissimè videtur obic-

obiectum & nulla apparet confusio, vt ex prima huius petitione necessario sequitur.

PROPOSITIO 4.

Eiusdem obiecti confusior est visio in tenebris, quam in luce.

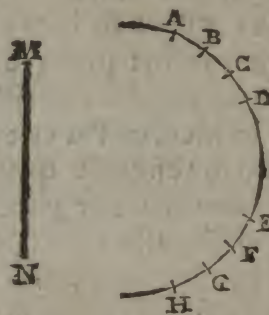
IN tenebris oculi retina a multis radiis non illustratur, & ideo levis illa illustratio versus extremitates superficiei BD facilius percipitur quam in luce, cum exilis illa illustratio à fortissimis lucis radijs plane deleatur: & proinde cum retina pars ab vnus puncti radiis illustrata maior videatur in tenebris quam in luce, maior erit (per 2 huius petitionem) visionis confusio in tenebris quam in luce, quod est propositum. Alia etiam ratio esse potest, quod in tenebris maxime dilatetur oculi pupilla, & ideo maior est obiecti in retinam radiatio; & proinde per huius 3 maior etiam visionis confusio. Tertia ratio est, quod in magna pupillæ dilatione plurimi sint radii extrauagantes, vnde confusa etiam oritur visio.

PROPOSITIO 5.

Quo confusior est obiecti visio, eo maior est obiecti magnitudo apparens.

SIt visibile MN, oculi retina AH; supponatur in retina AH depingi confusam imaginem visibilis MN, ita vt radii puncti extremi M incident in retinae superficiem FG, & radii extremi visibilis puncti N in retinae superficiem BC; manifestum est magnitudinem visibilis apparentem iudicari secundum quantitatem retinae BG a radiis totius visibilis illustrata: quod si cæteris paribus fiet maior imaginis confusio in retina depictæ, radii puncti M non solum incident in superficiem FG, sed in superficiem EH, superficiem FG seu
syl.

sylvulæ medium vndique cingentem; & radii puncti N non solum incident in superficiem BC, sed in maiorem BC vndique cingentem, nempe AD: & in hac visione, manifestum est magnitudinem visibilis apparentem iudicari secundum quantitatem superficiæ AH a radiis visibilis illustratæ; est autem superficies AH maior superficie BG; & proinde obiectum apparet maius in maiore confusione quam in minore, quod demonstrare oportuit.



Atque hæc est ratio quod corporum cælestium diametri maiores appareant, quando sunt magis lucida, quam quando sunt minus lucida; in huius enim tertia demonstratum est obiecta magis lucida (cæteris paribus) magis confusa videri quam obiecta minus lucida, & nunc demonstratur obiecta magis confusa maiora videri (cæteris paribus) quam minus confusa; & igitur obiecta lucida (cæteris paribus) maiora videntur quàm minus lucida. Ex huius etiam 5 demonstrari potest, quod (cæteris paribus) obiecta minora in maiore proportionem à confusione augmentari videantur quam maiora: Sive enim obiectum sit parvum sive magnum, æquale semper à confusione recipit incrementum, at æquale ad minus maiorem habet proportionem quam ad maius; & proinde si obiectum sit parvum, augmentatur a confusione in maiore

iore proportione quam si esset magnum. ex his concurren-
 tibus causis patet ratio cur Stellæ fixæ videantur, etiam si
 in tam vasta distantia sint omnino insensibiles: ob validam
 enim earum radiationem & in tenebris visionem, confusissi-
 me ab oculo videntur, & ob insignem earum paruitatem in
 maiore proportione ab hac confusione augmentantur, quam
 si essent maiores; ita ut decies millies forte & amplius ma-
 iores appareant, quam in tali distantia videri debent; nul-
 lius enim telescopii ope in hunc usque diem distinctæ & ter-
 minatæ videri possunt. ob easdem rationes parua candela in
 tenebris e longissimo intervallo videri potest magnitudinis
 satis considerabilis, & sideris instar scintillans. Ex prædi-
 ctis manifesta sit causa, quare scintillent sidera, aliquibus pri-
 mo consideratis: primo scintillationem esse obiecti lucidi
 confusam & tremulam seu mutabilem visionem, aliquando
 enim videtur obiectum maius, aliquando minus, aliquando
 lucidius versus unam partem, aliquando versus aliam: se-
 cundo eius causam esse mutationem aliquam seu tremorem
 in medio, tales enim omnino videmus effectus, cum inter
 oculum & visibile eleuantur vapores vel exhalationes, cuius
 ratio in optica versatum non potest latere: tertio notandum
 est, quod natura dum confusam percipit visionem humores
 oculi stimulet ad motum seu mutationem aliquam, ut con-
 fusioni perceptæ medeatur; cumque natura seu sensus com-
 munis distinctam sentit visionem, oculus suos humores a
 motu impedit, hoc enim rationi, experientiæ, & authoritati
 est consentaneum. Quod si sensus communis distinctam vi-
 sionem sentire non potest, dico oculi humores agitari & to-
 to visionis tempore non quiescere; hoc probari potest ex
 magna lassitudine, quam patitur oculus ex confusa visione;
 neque existimo esse rationi consentaneum, ut liſteret mo-
 tus, dum adhuc viget eius causa, nempe confusio percepta.
 hisce prælibatis, dico scintillationem siderum provenire ex
 hac humorum mutatione, dum frustra conatur oculus distin-

S

ctam

Etiam reddere eorum visionem, motus enim humorum eundem cum motu medii potest exhibere effectum, ut facillime demonstrari potest; probatur; sidera sunt obiecta quæ secundum hætenus demonstrata confusissime videntur, sed visio confusa oculi humores stimulat ad motum, ergo in visione siderum humores oculi mouentur; at ex humorum motu, aliquando videbuntur sidera maiora, aliquando minora, aliquando magis lucida, aliquando minus lucida, aliquando minus figuræ, aliquando alterius, sed hæc tremula & inconstans visio est scintillatio, & igitur sidera scintillant. ratio etiam evidens est cur Stellæ fixæ magis scintillent, quam alia obiecta; in Stellis enim fixis confusio est adeo notabilis, ut illius ope decies millies maiores videantur quam reuera sunt; quid ergo mirum si confusionum mutatio seu scintillatio in illis sit maxima. Sed contra hanc doctrinam obiiciet forte aliquis, a telescopiis male elaboratis maximam fieri visionis confusionem, sed non maximam scintillationem; respondeo istam confusionem, cum non fiat ab ipso oculo, ab humorum motu vix sensibilibiter mutari, & proinde istam scintillationem non esse valde sensibilem; quoniam scintillatio nil aliud est nisi confusionis mutatio, obiicient fortasse adhuc illos qui oculi vitio laborant maximam percipere visionis confusionem, sed plerumque parvam vel nullam scintillationem; respondeo oculi vitium maxime ordinarium esse humorum immobilitatem, & sine humorum vel medii motu nulla potest fieri scintillatio.

QVOD SOL SIT REALITER, ET FORMALITER calidus.

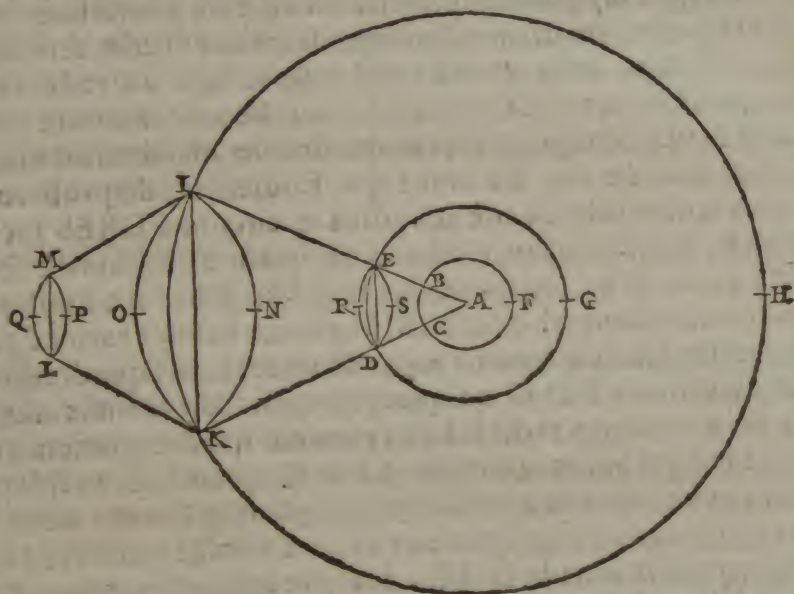
HAec propositio facile potest deduci ex nostris opticae promotæ demonstrationibus; sed in hoc loco magis accurate & geometricè hanc ipsam probabimus.

PRO-

PROBLEMA.

Ex combustionē speculī vel lentis ustoriē observata; distantiam à Sole invenire, in qua sol suis radijs directis eodem prorsus modo comburit, quō hic comburit speculum vel lens ustorium datum.

SIt sol BCF, cuius centrum A, speculum vel lens vstorium datum INKO omnes radios solares in se incidentes in circulum MPLQ reducens, & in illo combustionem accen-



dens. Supponimus speculum vel lentē INKO esse circulare, cuius axis ad cētrum solis vergit, & proinde conum AIOKN esse rectum. Sit ut IK diameter lentis vel speculi ad LM diametrum circuli combustionis, ita KA vel IA distantia speculi a centro solis ad DA. Dico DA esse distantiam quæsitam, hoc est, solem eodem modo comburere in distantia DA, quo comburit lens vel speculum IOKN in circulo MPLQ.

S a Per

Per speculi vel lentis IOKN extremitatem, ex centro A fiat sphaera IONKH; item per punctum D ex eodem centro A fiat sphaera ERDSG, cuius superficiei portio a coni AIOKN superficie comprehensa, sit RESD. Quoniam sol ex omni parte aequaliter radiat, facile est deducere ex 6 definitione 5 elementorum omnes radios solares esse ad radios in speculū vel lentem IOKN incidentes, ut integra superficies sphaerica ad eius portionem IOKN: sed ex archimede de sphaera & cylindro, integra superficies sphaerica est ad eius portionem IOKN, ut quadratum diametri ad quadratum chordae semissis arcus IK; & proinde omnes radii solares sunt ad radios in speculum vel lentem IOKN incidentes, hoc est radios in circulum MPLQ congregatos, ut quadratum diametri ad quadratum chordae semissis arcus IK. Eodem modo probatur omnes radios solares esse ad radios in circulum DRES incidentes, ut quadratum diametri ad quadratum chordae semissis arcus DE. sed quoniam arcus IK, DE, sunt similes, quadratum diametri circuli IKH eandem habent rationē ad quadratum chordae semissis arcus KI, quam habet quadratum diametri circuli EDG ad quadratum chordae semissis arcus ED; & ideo omnes radii solares eandem habent rationem ad radios congregatos in circulo LPMQ, quam habent iidem omnes radii solares ad radios congregatos in circulo RESD; sunt igitur radii congregati in circulo LPMQ aequales radiis congregatis in circulo DRES. Deinde ex constructione KI est ad LM ut KA ad DA; & ob similitudinem triangulorum KAI, DAE; KA est ad DA ut KI ad DE; & ideo LM, DE, sunt aequales; & igitur circuli LPMQ, DRES, sunt aequales: atque aequales radii in aequalibus spatiis eundem producant effectum; & proinde combustio in circulo DRES aequalis est combustioni in circulo LPMQ, quod demonstrandum erat.

CON.

CONSECTARIVM.

Atque ratione & experientia constat, quod, eadem speculivellentis diametro IK manente, quo minor fuerit circulus combustionis LPMQ, eo maior sit combustionis violentia, nempe (ut nos alibi demonstramus) in circulo combustionis ratione reciproca: & quo minor est circulus combustionis LPMQ vel illi æqualis DSER, eo brevior est recta DA, seu puncti D à sole distantia, & e contra: ideoque quo propius accedit circulus DSER ad solem, eo maior in circulo est calor, seu combustio; & igitur Sol non est solum virtualiter, sed etiam formaliter calidus, quod demonstrandum suscepi.

*DE SOLIS HUMILIS ET SVBLIMIS
magnitudine apparente.*

Admirantur nonnulli Solem humilem maiorem appare-
re etiam si instrumento astronomico observatus, e contra minor sit eius diameter apparens: quare minor plerumque sit eius diameter apparens prope horizontem quam in loco cœli elevatiore causa in promptu est, quæ à nullo astronomo ignoratur, nempe refraçtio quæ maior est inferioris limbi quam superioris; sed quare tunc nobis maior appareat conabimur hic explicare. Primo itaque sciendum est sensum communem iudicare de visibilis magnitudine, sicuti faciunt geometræ, nempe ex cognitis distantia & angulo visorio, & ideo quo maiorem percipit sensus communis visibilis distantiam, eo cæteris paribus maiorem iudicat visibilis magnitudinem; sed dum Sol existit prope horizontem, iudicat sensus communis maiorem esse solis distantiam quam in loco Cœli elevatiore ob multa corpora interiecta; & ideo prope horizontem iudicat etiam eius magnitudinem
ma-

maiores quam alibi, ubi corpora interiecta non videntur, & proinde de eius magna distantia iudicare non potest. Aliquando tamen ob nubes conexas inter nos & solem interiectas apparet Sol etiam instrumento observatus, multo maior quam ordinario videtur, atque hoc evenit etiam quando Sol est sublimis, sed sæpius quando est humilis ob maiorem nubium frequentium. quæ hic diximus de Sole eodem modo intelliguntur de reliquis corporibus cælestibus.

*DE VISIBILIVM PICTVRA
sub tecto obscuro.*

Intellektis illis quæ demonstrauius de imaginis natura & loco, facile est percipere, quare pingantur visibilia illustrata in albis obscurati tecti parietibus, si pateat exiguum aliquod foramen in tecto obscurato radiis visibilium liberum præbens transitum. Vnumquodque enim visibilis punctum dirigit conum radiosum intra tectum obscuratum, cuius coni vertex est visibilis punctum, & basis foramen illud exiguum, qui conus producitur vsque ad album & impositum parietis planum, illic aliam coni radiosi basem describens, à qua illi radii, ob plani inæqualitatem, vndique reflectuntur; cumque hæc coni radiosi in pariete basis oculo appareat sicut punctum opticum ob foraminis paruitatem, videbuntur omnes radii singulorum visibilis punctorum tectum ingressi a singulis parietis punctis diuergi; cumque hæc sit ipsa imaginis definitio, manifestum est in pariete esse visibilium imagines. Quod si foramen illud sit nimis largum, videtur imago illa confusa, quoniam radii singulorum visibilis punctorum non a punctis parietis opticis, sed a superficiibus sensibilibus diuerguntur. eodem modo si visibile foramen nimis appropinquet, conus productus basem describet in pariete non punctum opticum sed superficiem sensibilem; & ideo imago videtur confusa: idem etiam dicendum

Sum esset si paries recederet a foramine . quæ hic loquutus
sum de pariete , eodem modo intelligenda sunt de quocun-
que plano albo & impolito .

DE COMETARVM CAVDIS.

EXistimo plerosque huius seculi philosophos in hoc con-
venire, quod cometarum materia sit corpus aliquod
humidum ex vaporibus & exhalationibus terræ vel alicuius
corporis cælestis genitum ; quare autem luceant eorum cau-
dæ omnino controvertitur: existimo tamen hanc opinionem
esse maxime receptam, nempe, quod radii solis per refra-
ctionem in cometes corpore post eius transitum uniti, cau-
dæ lucentis efficiant similitudinem ; cui opinioni non sub-
scribo ob hanc præcipue rationē demonstrativam: omnis lucis
vel coloris apparentia provenit à reflectione, sed hic nulla
est reflectio, ergo ; probatur minor, si hic esset aliqua re-
flectio, esset reflectio radiorum ex cometæ corpore emer-
sorum ab ipso æthere, sed ab æthere nulla potest fieri refle-
ctio, ergo ; probatur minor, æther omnibus consentientibus
est corpus maxime diaphanum (hoc est) radiis omnibus a re-
flectione liberum præbens transitum. Hac igitur funditus
eversa, novam stabiliamus sententiam: sed primo animad-
vertendum est solis absentiam in corporibus præsertim hu-
midis & vaporosis crassas & opacas causari exhalationes,
quas sua præsentia omnino dispellit: hoc enim nobis terræ
incolis est notissimum; nam tempore nocturno crassus ille
aer ab omnibus sentitur, & minus validis præcipue aeri se-
reno assuetis sæpissime mortaliter nocet: at in zona frigida
ob raram solis præsentiam ita sensibilibiter incrassescit aer,
ut sæpissime illic observetur refractione horizontalis 4 vel 5
graduum, sicut a nautis batavis commemoratur. deinde
considerandum est cometas ex omnium fere consensu esse
corpora humida & maxime vaporosa, ex nebulis, fumis vel

ex-

exhalationibus genita, (vel fortasse corpus quodam humidum proprios suos vapores emittens & æthera semper perrigans absque vlllo motu circa axem) & ad solem eundem semper fere situm retinentia: hisce positis necessario sequitur medietatem cometæ soli adversam & ab illo nunquam calefactam nec illustratam crassis & valde opacis infestari vaporibus, qui a vaporosa illa cometæ materia & à se mutuo continuo nutriti, nulla vnquam (ob debilem & obliquam Solis lucem) facta ipsorum resolutione, in immensam altitudinem excrescunt, & solis radios non satis validos ad exhalationes dispellendas vndique reflectunt. in hac hypothese istæ exhalationes à radiis Solis illustratæ in longum extensæ apparent sicuti cauda soli semper opposita, sed ob irregularem vaporum ex cometa elevationem, aliquando curvata, & aliquando in vnam, aliquando in alteram cæli plagam deflectens: sicuti eodem fortasse modo appareret in omnibus planetis, si omnes suas partes ad Solem vicissim vertendo, vapores vndique non dispellerentur a validis & directè incidentibus Solis radiis.

Luna existente plena; illustratio terræ a Sole ad illustrationem terræ a Luna, est in ratione composita ex duplicata proportionem chordarum Parallaxium horizontalium Solis, ex terræ globo, & ex Lunæ globo, obseruati; & ex duplicata proportionem chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Lune.

Vires (sive illustratio) omnium radiorum solarium in terram incidentium, ad vires omnium radiorum solarium in Lunam incidentium (si in æqualia spatia congregarentur) sunt in ratione duplicata chordarum semiangulorum radioforum, seu in terminis astronomicis, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium Solis, ex terræ globo, & ex Lunæ globo, obseruati, vt in consecutio 1. 33. optice promotæ est demonstratum. Sed quoniam luna
exi-

existente plena, eodem modo illustratur terra à Lunæ hemi-
 sphærio radiante, quo illustraretur si vndique radiaret lu-
 na; supponamus vndique radiari lunam: supponimus etiam
 lunam radios solares absque vlla debilitatione & ex omni
 parte æqualiter reflectere. his suppositis, evidens est vires
 omnium radiorum solarium in terram incidentium ad semis-
 sem virium omnium radiorum lunarium esse in ratione du-
 plicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra
 & ex luna, supposito semper vtriusque radios in æqualia spa-
 tia congregari: atque vires omnium radiorum lunarium
 sunt ad vires omnium radiorum lunarium in terram inciden-
 tium, in duplicata ratione chordarum, semicirculi & paral-
 laxeos horizontalis lunæ, radiis scil. in spatia æqualia con-
 gregatis: & sumendo antecedentium dimidia, semissis viriū
 omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum
 lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chor-
 darum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ: pa-
 tent ergo sequentes analogiæ; vires omnium radiorum so-
 larium in terram incidentium sunt ad semissem virium om-
 nium radiorum lunarium, in ratione duplicata chordarum
 parallaxium solis ex terra & ex luna horizontalium; deinde
 semissis virium omnium radiorum lunarium est ad vires om-
 nium radiorum lunarium in terram incidentium, in dupli-
 cata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos hori-
 zontalis lunæ, radiis semper in æqualia spatia congregatis:
 at radii solares & lunares in terram incidentes in æqualia
 spatia congregantur, nempe terræ hemisphæria. Suppona-
 tur quoque terræ hemisphærium a semisse omnium radiorū
 lunarium etiam illustrari, eruntque terræ hemisphæriorum,
 a radiis solaribus, a semisse omnium radiorum lunarium, &
 a radiis lunaribus sibi debitis, illustrationes, in eisdem ratio-
 nibus cum viribus radiorum eadem hemisphæria illustran-
 tium: proportionem igitur prædictæ ita se habent; illustra-
 tio terræ a sole est ad illustrationem terræ a semisse radiorū
 luna.

T

luna.

lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna; deinde illustratio terræ a semisse radiorum lunarium est ad illustrationem terræ a luna in ratione duplicata chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ: at illustratio terræ a sole est ad illustrationem terræ a luna, in ratione composita ex proportionem illustrationis terræ a sole ad illustrationem terræ a semisse radiorum lunarium, & ex proportionem illustrationis terræ a semisse radiorum lunarium ad illustrationem terræ a luna; quæ proportionem eandem demonstratæ sunt cū duplicata proportionem chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna, & duplicata proportionem chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ, quod demonstrare oportuit.

Eodem prorsus modo demonstratur hoc generale Theorema.

Quolibet planeta existente pleno; illustratio vel calefactio terræ a Sole est ad illustrationem vel calefactionem terræ ab illo planeta, in ratione composita ex duplicata ratione chordarum, parallaxium horizontalium solis, ex terra & ex prædicto planeta observati, & ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis illius planeta.

DE STELLARVM FIXARVM DISTANTIA.

IN stellis fixis nulla observari potest parallaxis; & ideo de earum distantia multa absque ullo fundamento dicuntur; ego certe existimo illam esse maximam, neque fortasse absque omni ratione, sicut nunc patebit.

Certum est terram & omnes planetas esse corpora obscura & aliena sola luce fulgentia, item solem & omnia sidera fixa esse lucida & proprio tantum fulgore splendentia; hæc enim ex multis & certissimis phænomenis sunt manifestæ. Cumque Sol & stellæ fixæ sint sola universi corpora lucida,

cida, eiusdem generis censeari possunt, ita ut Sol quodammodo dici possit stella fixa vicina; & stellæ, soles longinqui: hisce consideratis non erit probabile nostram stellam fixam vicinam, seu Solem, inter tot millia esse omnium fixarum maximam & lucidissimam; possumus igitur haud absurdè affirmare vnam saltem stellam fixam (nempe syrium, quæ nobis omnium maxima & lucidissima apparet) ipsum solem & in splendore & magnitudine æquare: atque syrius in splendore inferior est Ioui in situ acronychio, sed ut euidentius fiat nostrum propositum, supponamus lucem syrii luci Iouis esse æqualem: sed lux solis est ad lucem Iouis in situ acronychio in ratione composita ex duplicata ratione chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex Ioue obseruati, & ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Iouis, ut patet ex antecedente; & ideo lux solis est ad lucem syrii in eadem ratione: parallaxis autem solis horizontalis ex terra obseruati secundum plerisque est $3'$: & semidiameter apparens Iouis in situ acronychio (hoc est parallaxis horizontalis terræ ex Ioue in situ acronychio obseruatæ) est $22''$; cumque in hoc situ distantia terræ a sole ad distantiam Iouis a sole vulgo sit ut 10 ad 52; erit distantia solis a Ioue ad distantiam terræ a Ioue, ut 52 ad 42; & proinde horizontalis parallaxis solis ex Ioue obseruati est $18''$: cumque in paruis angulis arcus inter se sint ut chordæ, chorda parallaxeos horizontalis solis ex terra obseruati ad chordam parallaxeos horizontalis solis ex Ioue obseruati est in ratione $3'$ ad $18''$, seu ut 180 ad 18 vel ut 10 ad 1, cuius ratio duplicata est 100 ad 1. deinde chorda graduum 90 (posito radio 100000) est 141421: cumque distantia Iouis a Sole ad distantiam terræ a Sole sit in ratione 52 ad 10 & Solis parallaxis horizontalis sit $3'$, manifestum est Iouis parallaxem horizontalem esse $35''$, cuius chorda est 17, posito etiam radio 1000000; & ideo chorda graduum 90 est ad chordam parallaxeos horizontalis Iouis ut 141421

T 2 ad

ad 17 seu ut 8319 ad 1, cuius ratio duplicata est 69205761 ad 1; illustratio igitur terræ a Sole est ad illustrationem terræ a Syrio in ratione cōposita ex proportionē 100 ad 1 ex & proportionē 69205761 ad 1; hoc est in ratione 6920576100 ad 1; cumque Sol & Syrius supponantur esse eiusdem magnitudinis & splendoris, manifestum est illustrationem terræ à Sole ad illustrationem terræ a Syrio esse in duplicata ratione chordarum semiangulorum radioforum Solis & Syrii in terram, hoc est parallaxium Solis & Syrii ex terra horizontalium; & ideo chorda parallaxeos horizontalis Solis est ad chordam parallaxeos horizontalis Syrii in subduplicata ratione 6920576100 ad 1, seu in ratione 83190 ad 1, sed in his parvulis angulis chordæ inter se sunt ut sinus, sinus ergo parallaxes horizontalis solis est ad sinum parallaxeos horizontalis Syrii, ut 83190 ad 1, sed Sol & Syrius eiusdem supponuntur magnitudinis, & ideo eorum distantie à terra inter se sunt in reciproca ratione sinuum parallaxium horizontalium; & proinde distantia Syrii a terra ad distantiam Solis a terra est ut 83190 ad 1; & ideo distantia Solis a terra ad distantiam Syrii à terra non est in ratione sensibili, quod demonstrare oportuit.

Quod si assumatur parallaxis horizontalis Solis minor quam 3' (certissimum enim est eam minorem esse vno minuto) magis adhuc insensibilis erit dicta proportio: Nos autē non existimamus omnes fixas æqualiter distare a Sole, nam probabile est quarundem distantias aliarum multis vicibus superare. Existimet forte aliquis meum argumentum non concludere, quoniam fortassis omnes radii solares in Iovem incidentes ab eo non reflectuntur, sicut ego suppono: respondeo tamen argumentum esse à fortiore, quo enim pauciores supponuntur radii a Iove reflecti, eo magis insensibilis erit prædicta proportio, ut cuiusvis computanti patebit.

QVOD

QVOD VISIO OPE TELESCOPII
vel microscopij non sit fallax.

Rerum opticarum non satis periti semper exclamant
 telescopia & microscopia visum solummodo decipere &
 nihil verum & reale nobis monstrare, neque evidentissimis
 experiētiis omnino convinci possunt; & igitur ratione ten-
 tandum est illos ad veritatem revocare. Visus fallacia po-
 test duobus modis accipi, primò & valde improprie, quan-
 do visibile eodem modo videtur in vna distantia, quo in alia
 videri debet; hoc enim absolute non potest dici visus falla-
 cia, etiā si respectiue ad istam distantiam ita dici poterit, in
 alia enim distantia est vera & debita visio: atque in hac ac-
 ceptione visio per telescopium vel microscopium omnino
 est fallax. Secundo & propriè, visus fallacia est quando vi-
 sibile vel eius pars aliqua non apparet in propria sua figura,
 situ, & propriis suis coloribus tinctum: atque in hac acce-
 ptione nulla inest fallacia visioni per telescopium vel micro-
 scopium perfectum, quæ hominis visioni perfectissimæ non
 inesse potest: in 50 enim & 51 opticae promotæ geometricè
 demonstratur, quod omnis visio per lentes vel specula, sit
 visio vera & realis in tali assignata distantia nudo oculo de-
 bita; si igitur nulla sit fallacia in visione oculi nudi, nec vlla
 erit in visione per telescopium vel microscopium, cum illæ
 visiones demonstrantur esse eædem. Sed dicet forte aliquis
 telescopium vel microscopium repræsentare aliquando visi-
 bile in situ everso, sed oculus ita nunquam facit, ergo: re-
 spondeo in hoc casu telescopium vel microscopium repræ-
 sentare visibile eodem modo quo appareret oculo nudo &
 everso in tali assignata distantia, vt facillè videtur ex 50 &
 51 opt. prom: siue enim obiecti, siue oculi everso, nihil mu-
 tat, præter merum situm quo ad nos, nec in visione nec in
 visibili.

Q.V.O.D.

QVOD OMNE VISIBILE IN
infinitum sit diuisibile.

SI visibile in infinitum non sit diuisibile, accipiat minima eius pars, quæ ex opt: prom: 55 vel 56 oculo repræsentetur in angulo aliquo visorio sensibili ex. g. 20 graduum; atque oculus percipit visibile in angulo visorio 20 graduum in multas partes diuisibile, & proinde apparet hæc minima visibilis pars oculo in multas partes diuisibilis; cumque natura homini non det oculos fallaces, & nec telescopium nec microscopium visum præbeat magis fallacem quam ipse oculus; necessario sequitur quod ista minima pars sit realiter diuisibilis, quod est absurdum, ponitur enim indivisibilis; & igitur non potest dari visibilis pars minima, est igitur omne visibile in infinitum diuisibile, quod demonstrare oportuit.

DE OBSERVATIONE SIMILITVDI-
nis inter Terram & Lunam.

Hisce temporibus magna est controuersia, num Lunæ globus sit ex terra & aqua, sicut noster hic globus terrestris; quæ facili experientia sit dirimi potest. Sit telescopium cuius lens obiectiua in latitudine ad minimum continens centies diametrum ueræ obseruatoris, ex vna parte plana & ad alteram convexa ex diametro 50 palmorum; sitque eius ocularis plana ex vna parte & ex altera $\frac{1}{2}$ palmi

conuexitatis. Huius telescopii ope videbitur Luna (supposita eius à terra distantia 240000 mille passuum) omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum. Deinde in loco aliquo eminentissimo (ex quo videri possunt maria, montes, prata, lacus, saxa, omnia vastissima, ad distantiam 40 mille passuum) & sub tecto vasto ad vltimum obscurato, dempto vno so-
lum-

N
 lummodo parvo foramine versus prædicta maria, montes,
 &c, a descripti telescopii lente oculari impleto, per quam
 obseruentur antedicta maria, montes, &c. (dum à Sole for-
 titer illustrantur) ab oculo 61 palmis distante à lente, vi-
 debuntur omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum, ex
 qua etiam distantia videbatur Luna; & proinde similitudi-
 nes & dissimilitudines inter Lunam & Terram ab obseruato-
 ribus videri poterunt. Huius praxeos demonstratio est ex
 opticae promotæ 50 & 51; ex illis enim deducitur æqualis
 distantia & illustratio distantie debita vtriusque visibilis, &
 est in utroque aliqua vitri tinctura. Sed dicet aliquis lunam
 hac ratione plus habere tincturæ vitreæ quam terra, quo-
 niam illius radii duo penetrant vitra, huius vero solummo-
 do, vnum; cui facile medetur, addendo in obseruatione
 terræ vnum vitrum ex vtraque parte planum eiusdem cum
 lente telescopii obiectiua crassitiei, ad alteram lentem ex
 parte plana iunctum; dicet adhuc aliquis vapores terrestres,
 vel terræ obseruationem omnino impedire, vel saltem eius
 colores mutare: respondeo quod terra obseruari debeat
 e loco altissimo & tempore sereno, & Luna dum prope ho-
 rizontem existit, vt idem semper in vtraque obseruatione
 defectus adsit. hisce consideratis, si luna appareat terra
 splendidior; dicendum est Lunam terra esse candidiorem
 & omnino opacum, quoniam nigredo & diaphaneitas refle-
 ctionis vires impediunt: Si vero contrarium videatur, con-
 traria ferme sunt iudicanda: si eadem in vtraque obserua-
 tione appareant phænomena, nulla ratio nos docet tellu-
 ris & Lunæ materias esse diuersas. Eadem quoque metho-
 do potest experientia fieri de similitudine inter duos quos-
 libet planetas, inter Solem & Stellæ fixas, inter nubes &
 cometas.

F I N I S.

